

УДК 519.2+512.643

МЕТОД 2D-SSA ДЛЯ АНАЛИЗА ДВУМЕРНЫХ ПОЛЕЙ

Н.Э. Голяндина, к.ф.-м.н., доцент
*Санкт-Петербургский государственный университет,
 Математико-механический факультет*
 Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28
 E-mail: neg99@mail.ru

К.Д. Усевич, студент
*Санкт-Петербургский государственный университет,
 Математико-механический факультет*
 Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28
 E-mail: usevich.k.d@gmail.com

Ключевые слова: анализ сингулярного спектра, метод «Гусеница»-SSA, анализ изображений, разложение Шмидта, сингулярное разложение
Key word: Singular Spectrum Analysis, «Caterpillar»-SSA method, image processing, Shmidt decomposition, Singular Value Decomposition

В данной работе алгоритм и теория метода анализа временных рядов «Гусеница»-SSA переносятся на двумерный случай: анализ двумерных полей (функций от двух переменных), в том числе, изображений. В работе рассматривается как абстрактный функциональный подход к методу 2D-SSA (2D Singular Spectrum Analysis), так и два его частных случая, непрерывный и дискретный. В дискретном случае исходное двумерное поле задается матрицей. Алгоритм дискретного 2D-SSA применим на практике и позволяет решать аналогичные одномерному случаю задачи, такие как разложение исходного поля на компоненты, выделение периодических компонент, очистка от шума и др. Рассмотрены такие базовые понятия SSA как разделимость и поля конечного ранга. Качество очистки двумерного изображения от шума исследовано с помощью статистического моделирования. Представлены примеры применения 2D-SSA к модельным и реальным изображениям.

2D-SSA METHOD FOR ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL FIELDS/ N.E. Golyandina (Mathematical Department, St.Petersburg State University, Universitetskij pr. 28, St.Petersburg Petrodvorets 198504, Russia, E-mail: neg99@mail.ru), K.D. Usevich (Mathematical Department, St.Petersburg State University, Universitetskij pr. 28, St.Petersburg Petrodvorets 198504, Russia, E-mail: usevich.k.d@gmail.com). Algorithm and theory of the «Caterpillar»-SSA method for time series analysis are extended to the 2D case, that is, to analysis of two-dimensional fields (functions of two variables) and image processing. The functional approach to 2D-SSA (2D Singular Spectrum Analysis) is considered together with two particular versions: continuous and discrete ones. In the discrete version, the initial field is given by a matrix. The discrete 2D-SSA is applicable in practice and allows one to solve problems like decomposition into a sum of interpretable components, extraction of periodic components, noise removal and others, as in the 1D case. Basic SSA notions such as separability and fields of finite rank are considered. Accuracy of image denoising is studied with the help of statistical simulation. Several examples of 2D-SSA applications to model and real-world images are presented.

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию метода 2D-SSA (2D Singular Spectrum Analysis) — расширения метода анализа временных рядов «Гусеница»-SSA на случай двумерных полей (функций от двух переменных). 2D-SSA позволяет разложить двумерное поле в сумму компонент, причем разложение строится без априори заданной модели. Метод работает с дискретными полями, т.е. функциями, заданными на дискретной равномерной сетке $f : \{0, \dots, N_x - 1\} \times \{0, \dots, N_y - 1\} \mapsto \mathbb{R}$; таким образом, он может быть применен, например, для цифровой обработки изображений. В работе также исследуется непрерывный вариант метода для функций, определенных на прямоугольнике $f : [0, t_x] \times [0, t_y] \mapsto \mathbb{R}$.

Метод 2D-SSA впервые был предложен в работе [4] («Гусеница» для двумерных полей), однако лишь в виде алгоритма. Метод «Гусеница»-SSA [7, 10, 13] для анализа одномерных временных рядов, напротив, достаточно хорошо исследован и имеет разработанную теорию. Поэтому основной целью данной работы являлось перенесение разработанной теории с одномерного случая на двумерный и исследование особенностей двумерного случая.

Кратко опишем базовый алгоритм метода «Гусеница»-SSA (также его можно найти в Приложении). Сначала для одномерного временного ряда $F = (f_0, \dots, f_{N-1})$ и заданной длины окна L , $1 < L < N$, строится ганкелева матрица размера $L \times K$, где $K = N - L + 1$: $F_N \longleftrightarrow \mathbf{X} = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K}$, $x_{ij} = f_{i+j-2}$, также называемая *траекторной матрицей*. Заметим, что существует взаимнооднозначное соответствие между рядами длины N и ганкелевыми матрицами $L \times K$. Для траекторной матрицы производится сингулярное разложение (SVD) матрицы $\mathbf{X} = \sum_i \mathbf{X}_i$, где $\mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$. Далее компоненты разложения \mathbf{X}_i группируются и мы получаем некоторое разложение траекторной матрицы $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_m}$. Наконец, с помощью ортогонального проектирования компонент по матричной норме Фробениуса на множество ганкелевых матриц, мы получаем разложение исходного ряда $F = F_1 + \dots + F_m$. Алгоритм 2D-SSA повторяет алгоритм метода «Гусеница»-SSA, но у него уже два параметра — размеры окна (L_x, L_y) , где $1 \leq L_x \leq N_x$, $1 \leq L_y \leq N_y$, $1 < L_x L_y < N_x N_y$, и раскладываемая с помощью SVD матрица строится иначе и имеет более сложную структуру.

Метод «Гусеница»-SSA позволяет разложить ряд в сумму интерпретируемых компонент, например, в сумму тренда, колебаний и шума, или в сумму сигнала и шума, или в сумму медленно-меняющихся и осциллирующих компонент. Можно ожидать, что и двумерный SSA (2D-SSA) будет обладать аналогичными свойствами. В данной работе приведено несколько примеров анализа цифровых изображений (см. раздел 5.), а в работе [12] метод 2D-SSA был использован для геологических данных с целью сглаживания и разложения данных на составляющие, соответствующие разным уровням подробности рельефа.

Естественный вопрос, который возникает при использовании метода, существует ли такая группировка слагаемых SVD траекторной матрицы, которая приводит к разложению на интерпретируемые слагаемые. Для ответа на этот вопрос в одномерном случае введено понятие *разделимости* рядов, и оно

достаточно подробно исследовано [7, 10]. Также довольно важным понятием является ранг ряда, т.е. количество компонент в SVD его траекторной матрицы. В одномерном случае подробно рассмотрен класс рядов *конечного ранга*, т.е. рядов, ранг которых не меняется при изменении длины окна. Понятия разделимости и ранга рядов являются основными для метода «Гусеница»-SSA, в этой работе вводятся и исследуются аналоги этих понятий для двумерного случая.

Далее кратко опишем структуру данной работы. В разделе 2. метод 2D-SSA рассматривается в рамках функционального подхода. Сначала описывается математический аппарат для разложения измеримых функций $f : (D, \mathcal{U}) \mapsto \mathbb{R}$ через разложение Шмидта. Для разложения одномерных функций («Гусеница»-SSA) этот аппарат описан в [5], однако в данной работе вводятся дополнительные понятия *конструкции SSA* и *произведения конструкции SSA*, и алгоритм 2D-SSA определяется с помощью произведения конструкций SSA для одномерного случая. Затем на языке конструкций SSA формулируется понятие разделимости, и, вместе с дискретным алгоритмом 2D-SSA, определяется непрерывная модель метода (аналогично тому, как это сделано в [5]). Для непрерывного случая исследуются условия разделимости, рассматривается класс полей конечного ранга, для которого, в частности, доказывается инвариантность метода относительно линейных преобразований аргументов (например, поворота).

Раздел 3. содержит алгоритм и теорию дискретного 2D-SSA, который может непосредственно применяться в практических приложениях. Для начала приводятся некоторые понятия и утверждения из алгебры матриц, в частности, операции векторизации и Кронекеровского произведения, которые нужны для описания алгоритма. Затем определяется формальный переход с функционального языка на язык матриц. Далее подробно описывается алгоритм 2D-SSA, в двух его представлениях: с помощью SVD блочно-ганкелевой траекторной матрицы и с помощью KP-SVD [2] (разложения в сумму Кронекеровских произведений) двумерной траекторной матрицы. Одно из представлений имеет много общего с методами 2D-ESPRIT [6], предназначенными для оценки параметров суммы экспоненциально модулированных гармоник. Сходство методов позволяет частично использовать теорию 2D-ESPRIT [3] для исследования 2D-SSA. Для дискретного случая также определяется понятие разделимости на матричном языке, описывается класс полей конечного ранга и исследуются различные примеры этих полей: произведение рядов, сумма рядов, полиномы и тригонометрические поля. Кроме того, вводится новое понятие полей неполного ранга, которое специфично только для двумерного случая.

Также были проведены численные эксперименты по очистке полей от шума. Метод сравнивался с другими методами, основанными на сингулярном разложении: MSSA [9] (метод анализа многомерных временных рядов) и непосредственное сингулярное разложение (SVD) матрицы, задающей исходное поле. Для этого было проведено статистическое моделирование, результаты которого содержатся в разделе 4.. В частности, было показано, что 2D-SSA во многих случаях предпочтительнее SVD матрицы поля, например, из-за инвариантности метода относительно линейных преобразований аргументов. Сравнение производилось на примере полей конечного ранга, неполного ранга

и произвольных изображений.

Для демонстрации возможностей метода в работу включено несколько примеров анализа цифровых изображений. Их можно найти в разделе 5..

Для того чтобы дать возможность сравнить двумерный случай с одномерным, в Приложение помещено краткое описание алгоритма и основных понятий «Гусеницы»-SSA. Кроме этого, там же содержится результат относительно эквивалентности понятий неполного и конечного ранга, не рассмотренный в теории одномерного SSA ранее.

2. Непрерывный и абстрактный случай

Данный раздел посвящен исследованию модификации метода «Гусеница»-SSA для функций двух переменных (двумерных полей) в рамках функционального подхода. Подробно рассматривается непрерывный вариант 2D-SSA.

2.1. Общий случай

2.1.1. Разложение функции через разложение Шмидта. Пусть (D, \mathcal{U}) — измеримое пространство, далее будем определять разложение для измеримых функций $f : D \mapsto \mathbb{R}$.

Рассмотрим (D_1, \mathcal{U}_1) и (D_2, \mathcal{U}_2) с конечными мерами μ_1 и μ_2 , а также измеримую сюръекцию $\theta : D_1 \times D_2 \mapsto D$, которая порождает σ -алгебру \mathcal{U}_θ в $D_1 \times D_2$: $\mathcal{U}_\theta = \{\theta^{-1}(A), A \in \mathcal{U}\}$.

Введем более короткие обозначения для некоторых пространств \mathbf{L}^2 функций:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1^2 &= \mathbf{L}^2(D_1, d\mu_1), \\ \mathbf{L}_2^2 &= \mathbf{L}^2(D_2, d\mu_2), \\ \mathbf{L}_{1,2}^2 &= \mathbf{L}^2(D_1 \times D_2, d(\mu_1 \otimes \mu_2)), \end{aligned}$$

со скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,2}$ соответственно.

Сюръекция θ порождает меру $\nu = (\mu_1 \otimes \mu_2) \theta^{-1}$ на (D, \mathcal{U}) , так что

$$(1) \quad \nu(A) = \mu_1 \otimes \mu_2(\theta^{-1}A),$$

$A \in \mathcal{U}$. Таким образом, мы можем рассмотреть пространство $\mathbf{L}^2(D, d\nu)$.

Будем называть

$$(2) \quad \Omega = (D_1, \mathcal{U}_1, \mu_1, D_2, \mathcal{U}_2, \mu_2, D, \mathcal{U}, \theta)$$

конструкцией SSA.

Перейдем, собственно, к разложению. Пусть $f : D \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая функция. Определим функцию $g : D_1 \times D_2 \mapsto \mathbb{R}$ как

$$(3) \quad g(u, s) = f(\theta(u, s)).$$

Так как θ — сюръекция, g определяет f и отображение $f \mapsto f \circ \theta$ можно назвать *вложением*, порожденным θ .

Пусть $g \in \mathbf{L}_{1,2}^2$, что равносильно $f \in \mathbf{L}^2(D, d\nu)$. Тогда можно рассмотреть разложение Шмидта [5]

$$(4) \quad g(u, s) = f(\theta(u, s)) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(u) \varphi_n(s), \quad \psi_n \in \mathbf{L}_1^2, \varphi_n \in \mathbf{L}_2^2,$$

где ψ_n будем называть *собственными функциями*, а φ_n — *факторными функциями*.

Напомним, что разложение (4), вообще говоря, определяется с помощью разложения оператора Гильберта-Шмидта $\mathbf{G} : \mathbf{L}_2^2 \mapsto \mathbf{L}_1^2$, задаваемого равенством

$$(5) \quad \mathbf{G}h = \int_{D_2} g(\cdot, s)h(s)\mu_2(ds), \quad h \in \mathbf{L}_2^2.$$

Подробнее о свойствах оператора \mathbf{G} и сопряженного к нему $\mathbf{G}^* : \mathbf{L}_1^2 \mapsto \mathbf{L}_2^2$, представимого как

$$\mathbf{G}^*f = \int_{D_1} g(u, \cdot)f(u)\mu_1(du), \quad f \in \mathbf{L}_1^2,$$

можно узнать, например, в [5].

Переход от разложения (4) к разложению исходной функции f осуществляется с помощью операции θ -проектирования.

Обозначим \mathbf{L}_θ^2 замкнутое подпространство пространства $\mathbf{L}_{1,2}^2$, состоящее из \mathcal{U}_θ -измеримых функций. Другими словами, каждый элемент h пространства \mathbf{L}_θ^2 может быть представлен как $h = \alpha \circ \theta$, где $\alpha : D \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая функция. Пусть \mathfrak{P}_θ — оператор ортогонального проектирования $\mathbf{L}_{1,2}^2 \mapsto \mathbf{L}_\theta^2$.

Замечание 1. Ортогональное проектирование функции $g_1 \in \mathbf{L}_{1,2}^2$ на \mathbf{L}_θ^2 эквивалентно ортогональному проектированию интегрального оператора $\mathbf{G}_1 : \mathbf{L}_2^2 \mapsto \mathbf{L}_1^2$ по операторной норме на подпространство интегральных операторов $\mathbf{L}_2^2 \mapsto \mathbf{L}_1^2$ с θ -измеримым ядром.

Из равенства (4) получается

$$(6) \quad f \circ \theta = \sum_n \mathfrak{P}_\theta \left(\sqrt{\lambda_n} \psi_n \otimes \varphi_n \right).$$

Естественно, равенство (6) выполняется $\mu_1 \otimes \mu_2$ -почти везде.

Определим

$$f_n \circ \theta = \mathfrak{P}_\theta \left(\sqrt{\lambda_n} \psi_n \otimes \varphi_n \right),$$

и f_n будем называть *восстановленной по n -й собственной тройке компонентой f* . Тогда (6) можно записать как

$$(7) \quad f = \sum_n f_n,$$

где ряд в правой части (7) сходится в $\mathbf{L}^2(D, d\nu)$ и значит (7) выполняется ν -почти везде.

Определим также *оператор восстановления* $\mathfrak{R}_\theta : \mathbf{L}_{1,2}^2 \mapsto \mathbf{L}^2(D, d\nu)$

$$(8) \quad \mathfrak{R}_\theta(h) = f, \quad \text{где } f \circ \theta = \mathfrak{P}_\theta(h).$$

Заметим, что $f_n = \mathfrak{R}_\theta \left(\sqrt{\lambda_n} \psi_n \otimes \varphi_n \right)$.

2.1.2. Прямое произведение пространств. Посмотрим, какими особенностями будет обладать построенная выше конструкция для случая, когда пространства D_1 , D_2 , D являются произведениями некоторых пространств, для которых данная конструкция уже построена.

Пусть есть

$$\begin{aligned}\Omega_x &= (D_{1x}, \mathcal{U}_{1x}, \mu_{1x}, D_{2x}, \mathcal{U}_{2x}, \mu_{2x}, D_x, \mathcal{U}_x, \theta_x), \\ \Omega_y &= (D_{1y}, \mathcal{U}_{1y}, \mu_{1y}, D_{2y}, \mathcal{U}_{2y}, \mu_{2y}, D_y, \mathcal{U}_y, \theta_y).\end{aligned}$$

Соответственно, определены меры ν_x и ν_y и сигма-алгебры \mathcal{U}_{θ_x} и \mathcal{U}_{θ_y} .

Будем производить построение согласно следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} (D_{1x}, \mu_{1x}) \times (D_{2x}, \mu_{2x}) & \xrightarrow{\theta_x} & (D_x, \nu_x) \\ \times & & \times \\ (D_{1y}, \mu_{1y}) \times (D_{2y}, \mu_{2y}) & \xrightarrow{\theta_y} & (D_y, \nu_y) \\ \parallel & & \parallel \text{ л. 2} \\ (D_1, \mu_1) \times (D_2, \mu_2) & \xrightarrow[\text{л. 1}]{\theta} & (D, \nu).\end{array}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}(D, \mathcal{U}) &= (D_x \times D_y, \sigma(\mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y)), \\ (D_1, \mathcal{U}_1) &= (D_{1x} \times D_{1y}, \sigma(\mathcal{U}_{1x} \times \mathcal{U}_{1y})), \\ (D_2, \mathcal{U}_2) &= (D_{2x} \times D_{2y}, \sigma(\mathcal{U}_{2x} \times \mathcal{U}_{2y})), \\ \mu_1 &= \mu_{1x} \otimes \mu_{1y}, \\ \mu_2 &= \mu_{2x} \otimes \mu_{2y},\end{aligned}$$

где μ_1 и μ_2 — конечные меры. Пусть $\pi : (D_{1x} \times D_{2x}) \times (D_{1y} \times D_{2y}) \mapsto D_1 \times D_2$ — канонический изоморфизм. Рассмотрим $\theta : D_1 \times D_2 \mapsto D$, где $\theta \circ \pi = \theta_x \times \theta_y$, т.е.

$$\theta((u_x, u_y), (s_x, s_y)) = (\theta_x(u_x, s_x), \theta_y(u_y, s_y)).$$

Результат следующей леммы получается непосредственно.

Лемма 1. *Отображение θ является $\mu_1 \otimes \mu_2$ -измеримой сюръекцией.*

Таким образом, конструкция SSA

$$\Omega = (D_1, \mathcal{U}_1, \mu_1, D_2, \mathcal{U}_2, \mu_2, D, \mathcal{U}, \theta)$$

корректно определена.

Определим меру ν и σ -алгебру \mathcal{U}_θ , как и в разделе 2.1.1.. Тогда справедлива следующая лемма и следствие из нее.

Лемма 2. 1. *Для любых $A_x \in \mathcal{U}_x$, $A_y \in \mathcal{U}_y$ выполняется*

$$\nu(A_x \times A_y) = \nu_x(A_x) \cdot \nu_y(A_y),$$

$$\text{т.е. } \nu = \nu_x \otimes \nu_y.$$

$$2. \mathcal{U}_\theta = \pi(\sigma(\mathcal{U}_{\theta_x} \times \mathcal{U}_{\theta_y})).$$

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\mathbf{L}_\theta^2 = \pi \left(\mathbf{L}^2 \left((D_{1x} \times D_{2x}) \times (D_{1y} \times D_{2y}), \sigma(\mathcal{U}_{\theta_x} \times \mathcal{U}_{\theta_y}), \right. \right. \\ \left. \left. (\mu_{1x} \otimes \mu_{2x}) \otimes (\mu_{1y} \otimes \mu_{2y}) \right) \right),$$

где $\pi(f)$ для функции f есть $f \circ \pi$, т.е. π здесь обозначает перестановку аргументов.

Далее будем называть построенную конструкцию SSA *произведением конструкций SSA* и обозначать $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$.

2.1.3. Разложение произведения функций. Если не только пространство D является произведением пространств, но и функция является произведением функций от своих аргументов, то справедлив следующий результат.

Лемма 3. *Пусть даны*

$$\begin{aligned} \Omega_x &= (D_{1x}, \mathcal{U}_{1x}, \mu_{1x}, D_{2x}, \mathcal{U}_{2x}, \mu_{2x}, D_x, \mathcal{U}_x, \theta_x), \\ \Omega_y &= (D_{1y}, \mathcal{U}_{1y}, \mu_{1y}, D_{2y}, \mathcal{U}_{2y}, \mu_{2y}, D_y, \mathcal{U}_y, \theta_y), \end{aligned}$$

а также измеримые функции $f^{(X)} : D_x \mapsto \mathbb{R}$ и $f^{(Y)} : D_y \mapsto \mathbb{R}$, причем $f^{(X)} \in \mathbf{L}^2(D_x, d\nu_x)$ и $f^{(Y)} \in \mathbf{L}^2(D_y, d\nu_y)$. Рассмотрим произведение конструкций SSA

$$\Omega_x \times \Omega_y = (D_1, \mathcal{U}_1, \mu_1, D_2, \mathcal{U}_2, \mu_2, D, \mathcal{U}, \theta)$$

и положим $f : D \mapsto \mathbb{R}$, так что $f(x, y) = f^{(X)}(x) \cdot f^{(Y)}(y)$. Пусть функции $f^{(X)}$ и $f^{(Y)}$ имеют разложения

$$\begin{aligned} g_x(u_x, s_x) &= f^{(X)}(\theta_x(u_x, s_x)) = \sum_n \sqrt{\lambda_{xn}} \psi_{xn}(u_x) \varphi_{xn}(s_x), \\ g_y(u_y, s_y) &= f^{(Y)}(\theta_y(u_y, s_y)) = \sum_m \sqrt{\lambda_{ym}} \psi_{ym}(u_y) \varphi_{ym}(s_y). \end{aligned}$$

Определим

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(u_x, u_y) &= \psi_{xn}(u_x) \cdot \psi_{ym}(u_y), \\ \varphi_{nm}(s_x, s_y) &= \varphi_{xn}(s_x) \cdot \varphi_{ym}(s_y), \\ \lambda_{nm} &= \lambda_{xn} \lambda_{ym}. \end{aligned}$$

Тогда

1. $\{\psi_{nm}\}_{n,m}, \{\varphi_{nm}\}_{n,m}$ — ортонормированные системы в \mathbf{L}_1^2 и \mathbf{L}_2^2 соответственно.
2. $f \in \mathbf{L}^2(D, d\nu)$.
3. Разложение функции g

$$g = \sum_{n,m} \sqrt{\lambda_{nm}} \psi_{nm} \otimes \varphi_{nm}$$

также будет разложением Шмидта, с точностью до переупорядочения слагаемых.

4. Для восстановленных компонент имеет место равенство $f_{nm} = f_n^{(X)} \otimes f_m^{(Y)}$.

Доказательство предложения 3.

1. Вычислим скалярное произведение функций ψ_{nm} и ψ_{kl} .

$$\begin{aligned} \langle \psi_{nm}; \psi_{kl} \rangle_1 &= \int_{D_1} \psi_{nm}(u_x, u_y) \psi_{kl}(u_x, u_y) \mu_{1x}(du_x) \mu_{1y}(du_y) = \\ &= \int_{D_{1x}} \int_{D_{1y}} \psi_{xn}(u_x) \psi_{ym}(u_y) \psi_{xk}(u_x) \psi_{yl}(u_y) \mu_{1x}(du_x) \mu_{1y}(du_y) = \\ &= \left(\int_{D_{1x}} \psi_{xn}(u_x) \psi_{xk}(u_x) \mu_{1x}(du_x) \right) \times \\ &\times \left(\int_{D_{1y}} \psi_{ym}(u_y) \psi_{yl}(u_y) \mu_{1y}(du_y) \right) = \\ &= \langle \psi_{xn}; \psi_{xk} \rangle_{1x} \cdot \langle \psi_{ym}; \psi_{yl} \rangle_{1y} = \\ &= \begin{cases} 0, & (n \neq k) \text{ или } (m \neq l), \\ 1, & (n = k) \text{ и } (m = l). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, $\{\psi_{nm}\}_{n,m}$ — ортонормированная система в \mathbf{L}_1^2 . Сделав аналогичные выкладки, можно убедиться, что система $\{\varphi_{nm}\}_{n,m}$ тоже является ортонормированной.

2. По лемме 2 $\nu = \nu_x \otimes \nu_y$, а следовательно и $f \in \mathbf{L}^2(D_x \times D_y, d(\nu_x \otimes \nu_y)) = \mathbf{L}^2(D, d\nu)$.

3. Зафиксируем $u = (u_x, u_y)$ и $s = (s_x, s_y)$. Получим

$$\begin{aligned} g(u, s) &= g((u_x, u_y), (s_x, s_y)) = g_x(u_x, s_x) \cdot g_y(u_y, s_y) = \\ &= \left(\sum_n \sqrt{\lambda_{xn}} \psi_{xn}(u_x) \varphi_{xn}(s_x) \right) \times \\ &\times \left(\sum_m \sqrt{\lambda_{ym}} \psi_{ym}(u_y) \varphi_{ym}(s_y) \right) = \\ &= \sum_{n,m} \sqrt{\lambda_{xn} \lambda_{ym}} \psi_{xn}(u_x) \varphi_{xn}(s_x) \psi_{ym}(u_y) \varphi_{ym}(s_y) = \\ &= \sum_{n,m} \sqrt{\lambda_{nm}} \psi_{nm}(u_x, u_y) \varphi_{nm}(s_x, s_y). \end{aligned}$$

Как уже доказано, $\{\psi_{nm}\}_{n,m}$ и $\{\varphi_{nm}\}_{n,m}$ — ортонормированные системы в \mathbf{L}_1^2 и \mathbf{L}_2^2 соответственно. Ряд $\sum_{n,m} (\sqrt{\lambda_{nm}})^2$ сходится:

$$\sum_{n,m} (\sqrt{\lambda_{nm}})^2 = \sum_{n,m} \lambda_{xn} \lambda_{ym} = \left(\sum_n \lambda_{xn} \right) \cdot \left(\sum_m \lambda_{ym} \right) < +\infty.$$

Таким образом, по лемме 1.1 из [5], равенство

$$g = \sum_{n,m} \sqrt{\lambda_{nm}} \psi_{nm} \otimes \varphi_{nm}$$

имеет место в $\mathbf{L}_{1,2}^2$ и является разложением Шмидта функции g .

4. Для восстановленной компоненты $f_{nm} = \mathfrak{R}_\theta (\sqrt{\lambda_{nm}} \psi_{nm} \otimes \varphi_{nm})$ выполняется

$$\begin{aligned} f_{nm} \circ \theta \circ \pi &= \mathfrak{P}_\theta (\sqrt{\lambda_{nm}} \psi_{nm} \otimes \varphi_{nm}) \circ \pi = \\ &= \mathfrak{P}_{(\theta \circ \pi)} (\sqrt{\lambda_{nm}} \psi_{nm} \otimes \varphi_{nm} \circ \pi) = \\ &= \mathfrak{P}_{(\theta \circ \pi)} \left((\sqrt{\lambda_{xn}} \psi_{xn} \otimes \varphi_{xn}) \otimes (\sqrt{\lambda_{ym}} \psi_{ym} \otimes \varphi_{ym}) \right) = \\ &= \mathfrak{P}_{\theta_x} \left((\sqrt{\lambda_{xn}} \psi_{xn} \otimes \varphi_{xn}) \right) \otimes \mathfrak{P}_{\theta_y} \left((\sqrt{\lambda_{ym}} \psi_{ym} \otimes \varphi_{ym}) \right) = \\ &= (f_n^{(X)} \circ \theta_x) \otimes (f_m^{(Y)} \circ \theta_y), \end{aligned}$$

а значит имеет место искомое равенство.

2.2. Аддитивная «Гусеница» для двумерных полей (2D-SSA)

2.2.1. Общая конструкция 2D-SSA. Аналогично тому, как это сделано в [5], рассмотрим случай, когда пространства являются отрезками в \mathbb{R} , а отображения θ_x и θ_y определены как суммы своих аргументов.

Пусть $D_x = [0, t_x)$ и $D_y = [0, t_y)$. Зафиксируем параметры τ_x и τ_y — *размеры окна*, причем $0 < \tau_x < t_x$ и $0 < \tau_y < t_y$. Положим

$$\begin{aligned} D_{1x} &= [0, \tau_x), & D_{2x} &= [0, t_x - \tau_x), \\ D_{1y} &= [0, \tau_y), & D_{2y} &= [0, t_y - \tau_y), \\ \theta_x(u_x, s_x) &= u_x + s_x \text{ для } u_x \in [0, \tau_x), s_x \in [0, t_x - \tau_x), \\ \theta_y(u_y, s_y) &= u_y + s_y \text{ для } u_y \in [0, \tau_y), s_y \in [0, t_y - \tau_y). \end{aligned}$$

Пусть $\{\mu^\alpha\}_{\alpha>0}$ — параметрическое семейство конечных мер на борелевских подмножествах \mathbb{R} , причем каждая мера μ^α сосредоточена на отрезке $[0, \alpha]$. Рассмотрим меры

$$\begin{aligned} \mu_{1x} &= \mu^{\tau_x}, & \mu_{2x} &= \mu^{t_x - \tau_x}, \\ \mu_{1y} &= \mu^{\tau_y}, & \mu_{2y} &= \mu^{t_y - \tau_y}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{U}_{1x}, \mathcal{U}_{2x}, \mathcal{U}_{1y}, \mathcal{U}_{2y}$ — соответствующие борелевские σ -алгебры, на которых заданы эти меры. Пусть

$$\begin{aligned} \Omega_x &= (D_{1x}, \mathcal{U}_{1x}, \mu_{1x}, D_{2x}, \mathcal{U}_{2x}, \mu_{2x}, D_x, \mathcal{U}_x, \theta_x), \\ \Omega_y &= (D_{1y}, \mathcal{U}_{1y}, \mu_{1y}, D_{2y}, \mathcal{U}_{2y}, \mu_{2y}, D_y, \mathcal{U}_y, \theta_y). \end{aligned}$$

Заметим, что эти построения аналогичны построениям в [5] для аддитивной «Гусеницы». Рассмотрим их прямое произведение:

$$(9) \quad \Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (D_1, \mathcal{U}_1, \mu_1, D_2, \mathcal{U}_2, \mu_2, D, \mathcal{U}, \theta),$$

оно и будет *конструкцией SSA для двумерных полей*. Тогда

$$\begin{aligned} D_1 &= [0, \tau_x) \times [0, \tau_y), \mu_1 = \mu_{1x} \otimes \mu_{1y}, \\ D_2 &= [0, t_x - \tau_x] \times [0, t_y - \tau_y], \mu_2 = \mu_{2x} \otimes \mu_{2y}, \\ D &= [0, t_x) \times [0, t_y), \nu = (\mu_1 \otimes \mu_2)\theta^{-1} = \nu_x \otimes \nu_y, \\ \theta((u_x, u_y), (s_x, s_y)) &= (u_x + s_x, u_y + s_y). \end{aligned}$$

2.2.2. Алгоритм. Пусть $f : D \mapsto \mathbb{R}$ — измеримая функция, тогда алгоритм аддитивного 2D-SSA можно разбить на следующие шаги:

1. Вложение

Определим функцию $g : D_1 \times D_2 \mapsto \mathbb{R}$ как

$$(10) \quad \begin{aligned} g((u_x, u_y), (s_x, s_y)) &= (f \circ \theta)((u_x, u_y), (s_x, s_y)) = \\ &= f(u_x + s_x, u_y + s_y). \end{aligned}$$

Функцию g будем называть *вложением f в $\mathbf{L}_{1,2}^2$* .

2. Сингулярное разложение

Пусть $f \in \mathbf{L}^2(D, d\nu)$, т.е. $g \in \mathbf{L}_{1,2}^2$. Тогда можно рассмотреть разложение Шмидта:

$$(11) \quad \begin{aligned} g((u_x, u_y), (s_x, s_y)) &= f(u_x + s_x, u_y + s_y) = \\ &= \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(u_x, u_y) \varphi_n(s_x, s_y), \end{aligned}$$

где $\psi_n \in \mathbf{L}_1^2$ и $\varphi_n \in \mathbf{L}_2^2$.

3. Группировка

Зададим разбиение множества индексов на m подмножеств:

$$\begin{aligned} I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m &= \mathbb{N}, \\ I_k \cap I_l &= \emptyset \quad \text{для } k \neq l. \end{aligned}$$

Тогда разложение (11) можно представить в виде

$$(12) \quad \begin{aligned} g &= g_{I_1} + \dots + g_{I_m}, \quad \text{где} \\ g_I &= \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} \psi_i \otimes \varphi_i \quad \text{для } I \subseteq \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Процедура выбора подмножеств индексов называется *группировкой собственных троек*. Этот этап является самым важным в практических приложениях, и он тесно связан с понятием разделимости, описанным в следующем разделе.

4. θ -Проектирование

Пусть имеется множество индексов $I \subseteq \mathbb{N}$. Определим функцию $f_I \in \mathbf{L}^2(D, d\nu)$ как

$$(13) \quad f_I = \mathfrak{R}_\theta(g_I),$$

где \mathfrak{R}_θ — оператор восстановления, введенный в (8).

Будем называть f_I *восстановленной* по набору индексов I *компонентой*.

В силу линейности оператора \mathfrak{R}_θ для восстановленных компонент имеет место равенство:

$$(14) \quad f = \sum_{k=1}^m f_{I_k}.$$

2.2.3. Непрерывный случай. В непрерывном случае мы рассматриваем конструкцию 2D-SSA из подраздела 2.2.1., где в качестве семейства мер $\{\mu^\alpha\}_{\alpha>0}$ берется семейство мер Лебега на отрезках $[0, \alpha]$, т.е.

$$\begin{aligned} \mu_{1x} &= \text{mes}_{[0, \tau_x]}, & \mu_{2x} &= \text{mes}_{[0, t_x - \tau_x]}, \\ \mu_{1y} &= \text{mes}_{[0, \tau_y]}, & \mu_{2y} &= \text{mes}_{[0, t_y - \tau_y]}. \end{aligned}$$

Замечание 2. *Вместо семейства мер Лебега можно выбрать семейство равномерных распределений на $[0, \alpha]$, тогда разложение (11) будет таким же, как и в случае мер Лебега, с точностью до нормировки функций φ_n и ψ_n . При таком выборе семейства мер меры μ_1, μ_2 являются равномерными распределениями на $[0, \tau_x] \times [0, \tau_y]$ и $[0, t_x - \tau_x] \times [0, t_y - \tau_y]$, а мера ν будет распределением суммы указанных равномерно распределенных случайных величин.*

Рассмотрим более подробно этап восстановления.

Пусть $h \in \mathbf{L}_{1,2}^2$. Тогда $(\mathfrak{R}_\theta h)(x, y)$ с точностью до константы является средним значением функции $h((u_x, u_y), (s_x, s_y))$ на множестве

$$\{((u_x, u_y), (s_x, s_y)) \in D_1 \times D_2 : x = u_x + s_x, y = u_y + s_y\}.$$

Оператор восстановления можно записать как

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}_\theta h)(x, \cdot) &= \mathfrak{R}_{\theta_y}(h_1(x, \cdot)), \\ h_1(\cdot, (u_y, s_y)) &= \mathfrak{R}_{\theta_x}(h \circ \pi(\cdot, (u_y, s_y))), \end{aligned}$$

где \mathfrak{R}_{θ_x} и \mathfrak{R}_{θ_y} — операторы восстановления в одномерном случае, называемые также операторами *диагонального усреднения*.

Покажем, как выглядит оператор восстановления \mathfrak{R}_{θ_x} .

Пусть задана $h_x \in \mathbf{L}_{1,2x}^2$. Обозначим $\tau_* = \min(\tau_x, t_x - \tau_x)$, $\tau^* = \max(\tau_x, t_x - \tau_x)$ и определим функцию $h^* : [0, \tau_*] \times [0, \tau^*] \mapsto \mathbb{R}$ как

$$h^*(u_x, s_x) = \begin{cases} h_x(u_x, s_x), & \tau_x \leq t_x/2, \\ h_x(s_x, u_x), & \tau_x > t_x/2, \end{cases}$$

В приведенном выше равенстве полагаем $h_x(u_x, s_x) = 0$ для тех (u_x, s_x) , для которых h_x не определена.

Тогда

$$(15) \quad (\mathfrak{R}_{\theta_x} h_x)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x h^*(s, x-s) ds, & 0 < x \leq \tau_*, \\ \frac{1}{\tau_*} \int_0^{\tau_*} h^*(s, x-s) ds, & \tau_* < x \leq \tau^*, \\ \frac{1}{t_x - x} \int_{x-\tau^*}^{\tau_*} h^*(s, x-s) ds, & \tau^* < x < t_x. \end{cases}$$

Оператор \mathfrak{R}_{θ_y} можно выразить таким же образом (если формально заменить в (15) все символы x на y).

2.3. Разделимость

Важность и смысл понятия разделимости подробно описаны в [7] и мы не будем здесь подробно на этом останавливаться. Также в разделе 5. можно найти примеры, поясняющие важность этого понятия. Введем понятие разделимости для общего случая разложения функций через разложение Шмидта.

2.3.1. Общее определение. Рассмотрим конструкцию SSA

$$\Omega = (D_1, \mathcal{U}_1, \mu_1, D_2, \mathcal{U}_2, \mu_2, D, \mathcal{U}, \theta).$$

Пусть заданы $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbf{L}^2(D, d\nu)$. Определим функцию $f = f^{(1)} + f^{(2)}$. Каждой из функций соответствует интегральный оператор (см. (5)), \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 и \mathbf{G} соответственно.

Пусть $\{\psi_n^{(1)}\}$ и $\{\psi_n^{(2)}\}$ — ортонормированные системы собственных функций для разложений (4), а $\{\varphi_n^{(1)}\}$ и $\{\varphi_n^{(2)}\}$ — соответствующие системы факторных функций. Обозначим линейные оболочки систем

$$(16) \quad \mathcal{L}_{\psi}^{(1)} = \text{span}(\{\psi_n^{(1)}\}_n), \mathcal{L}_{\psi}^{(2)} = \text{span}(\{\psi_n^{(2)}\}_n).$$

Они будут являться замкнутыми подпространствами \mathbf{L}_1^2 . Аналогично обозначим как $\mathcal{L}_{\varphi}^{(1)}$ и $\mathcal{L}_{\varphi}^{(2)}$ соответствующие подпространства \mathbf{L}_2^2 .

Определение 1. Если $\mathcal{L}_{\psi}^{(1)} \perp \mathcal{L}_{\psi}^{(2)}$ и $\mathcal{L}_{\varphi}^{(1)} \perp \mathcal{L}_{\varphi}^{(2)}$, то будем говорить, что разложение (4) разделяет функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ в сумме $f = f^{(1)} + f^{(2)}$, или, иначе, что $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ (слабо) разделимы.

Лемма 4. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ разделимы разложением (4);
2. Операторы $\mathbf{G}_1^* \mathbf{G}_2$ и $\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2^*$ являются нулевыми.

Это утверждение доказано в [5]. Приведем довольно важный вид условия разделимости. Так как операторы — интегральные, условие разделимости функций $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ эквивалентно следующей паре тождеств:

1. Для $\mu_1 \otimes \mu_1$ -почти всех $(u, v) \in D_1 \times D_1$

$$G_{11}(u, v) = \int_{D_2} g^{(1)}(u, x)g^{(2)}(v, x)\mu_2(dx) = 0.$$

2. Для $\mu_2 \otimes \mu_2$ -почти всех $(u^*, v^*) \in D_2 \times D_2$

$$G_{22}(u^*, v^*) = \int_{D_1} g^{(1)}(x, u^*)g^{(2)}(x, v^*)\mu_1(dx) = 0.$$

2.3.2. Разделимость произведений функций. Рассмотрим случай произведения конструкций SSA

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_x \times \Omega_y, \quad \text{где} \\ \Omega_x &= (D_{1x}, \mathcal{U}_{1x}, \mu_{1x}, D_{2x}, \mathcal{U}_{2x}, \mu_{2x}, D_x, \mathcal{U}_x, \theta_x), \\ \Omega_y &= (D_{1y}, \mathcal{U}_{1y}, \mu_{1y}, D_{2y}, \mathcal{U}_{2y}, \mu_{2y}, D_y, \mathcal{U}_y, \theta_y),\end{aligned}$$

и сформулируем также общее утверждение для произведения функций.

Лемма 5. Пусть $p^{(1)}, p^{(2)} \in \mathbf{L}^2(D_x, d\nu_x)$ и $q^{(1)}, q^{(2)} \in \mathbf{L}^2(D_y, d\nu_y)$. Положим $f^{(1)}, f^{(2)} : D_x \times D_y \mapsto \mathbb{R}$, так что $f^{(1)}(x, y) = p^{(1)}(x) \cdot q^{(1)}(y)$ и $f^{(2)}(x, y) = p^{(2)}(x) \cdot q^{(2)}(y)$. Тогда для разделимости полей $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ достаточно разделимости хотя бы одной пары из $p^{(1)}, p^{(2)}$ и $q^{(1)}, q^{(2)}$.

Доказательство леммы 5. Пусть $\{\psi_{xn}^{(1)}\}$ и $\{\psi_{xk}^{(2)}\}$ — системы собственных функций в разложениях $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, а $\{\psi_{ym}^{(1)}\}$ и $\{\psi_{yl}^{(2)}\}$ — соответственно, в разложениях $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. Соответствующие линейные оболочки обозначим $\mathcal{L}_{\psi_x}^{(1)}, \mathcal{L}_{\psi_x}^{(2)} \subset \mathbf{L}_{1x}^2$ и $\mathcal{L}_{\psi_y}^{(1)}, \mathcal{L}_{\psi_y}^{(2)} \subset \mathbf{L}_{1y}^2$. Определим $\{\psi_{nm}^{(1)}\}$ и $\{\psi_{kl}^{(2)}\}$ как

$$(17) \quad \psi_{nm}^{(1)} = \psi_{xn}^{(1)} \otimes \psi_{ym}^{(1)}, \quad \psi_{kl}^{(2)} = \psi_{xk}^{(2)} \otimes \psi_{yl}^{(2)}.$$

Тогда, по лемме 3, эти системы являются системами собственных функций в разложениях $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$. Отсюда

$$\begin{aligned}\langle \psi_{nm}^{(1)}; \psi_{kl}^{(2)} \rangle_1 &= \int_{D_1} \psi_{nm}^{(1)}(u_x, u_y) \psi_{kl}^{(2)}(u_x, u_y) \mu_{1x}(du_x) \mu_{1y}(du_y) = \\ &= \int_{D_{1x}} \int_{D_{1y}} \psi_{xn}^{(1)}(u_x) \psi_{ym}^{(1)}(u_y) \psi_{xk}^{(2)}(u_x) \psi_{yl}^{(2)}(u_y) \mu_{1x}(du_x) \mu_{1y}(du_y) = \\ &= \left(\int_{D_{1x}} \psi_{xn}^{(1)}(u_x) \psi_{xk}^{(2)}(u_x) \mu_{1x}(du_x) \right) \times \\ &\times \left(\int_{D_{1y}} \psi_{ym}^{(1)}(u_y) \psi_{yl}^{(2)}(u_y) \mu_{1y}(du_y) \right) = \\ &= \langle \psi_{xn}^{(1)}; \psi_{xk}^{(2)} \rangle_{1x} \cdot \langle \psi_{ym}^{(1)}; \psi_{yl}^{(2)} \rangle_{1y}.\end{aligned}$$

Если аналогичным образом обозначить системы факторных функций $\{\varphi_{xn}^{(1)}\}$, $\{\varphi_{xk}^{(2)}\}$, $\{\varphi_{ym}^{(1)}\}$, $\{\varphi_{yl}^{(2)}\}$, их линейные оболочки $\mathcal{L}_{\varphi x}^{(1)}$, $\mathcal{L}_{\varphi x}^{(2)}$, $\mathcal{L}_{\varphi y}^{(1)}$ и $\mathcal{L}_{\varphi y}^{(2)}$ и определить $\{\varphi_{nm}^{(1)}\}$, $\{\varphi_{kl}^{(2)}\}$, как в (17), то имеют место равенства

$$\langle \varphi_{nm}^{(1)}; \varphi_{kl}^{(2)} \rangle_2 = \langle \varphi_{xn}^{(1)}; \varphi_{xk}^{(2)} \rangle_{2x} \cdot \langle \varphi_{ym}^{(1)}; \varphi_{yl}^{(2)} \rangle_{2y}.$$

Пусть, например, $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ — разделимы. Тогда $\mathcal{L}_{\psi x}^{(1)} \perp \mathcal{L}_{\psi x}^{(2)}$ и $\mathcal{L}_{\varphi x}^{(1)} \perp \mathcal{L}_{\varphi x}^{(2)}$. Из приведенных выше равенств следует $\mathcal{L}_{\psi}^{(1)} \perp \mathcal{L}_{\psi}^{(2)}$ и $\mathcal{L}_{\varphi}^{(1)} \perp \mathcal{L}_{\varphi}^{(2)}$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Условие леммы 5 не является необходимым. Пусть, например, $\mathcal{L}_{\psi x}^{(1)} \perp \mathcal{L}_{\psi x}^{(2)}$ и $\mathcal{L}_{\varphi y}^{(1)} \perp \mathcal{L}_{\varphi y}^{(2)}$. Из равенств в доказательстве леммы 5 следует разделимость $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$, однако этого недостаточно для разделимости хотя бы одной из пар $p^{(1)}, p^{(2)}$ и $q^{(1)}, q^{(2)}$.

2.3.3. Аддитивный 2D-SSA. Непрерывный случай. Пусть мы находимся в условиях раздела 2.2.3..

Для полей $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ разделимость означает равенство нулю интегралов

$$(18) \quad \int_0^{\tau_x} \int_0^{\tau_y} f^{(1)}(u_x + x, u_y + y) f^{(2)}(v_x + x, v_y + y) dx dy = 0$$

для почти всех $u_x, v_x \in [0, t_x - \tau_x]$, $u_y, v_y \in [0, t_y - \tau_y]$, а также

$$(19) \quad \int_0^{t_x - \tau_x} \int_0^{t_y - \tau_y} f^{(1)}(u_x^* + x, u_y^* + y) f^{(2)}(v_x^* + x, v_y^* + y) dx dy = 0$$

для почти всех $u_x^*, v_x^* \in [0, \tau_x]$, $u_y^*, v_y^* \in [0, \tau_y]$. Заметим, что здесь и далее индексы у переменных обозначают лишь принадлежность к соответствующим пространствам, а никак не зависимость переменных от x и y .

Далее рассмотрим случай гладких функций $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbf{C}^1([0, t_x] \times [0, t_y])$. Перепишем систему равенств (18) как

$$\int_{v_x}^{v_x + \tau_x} \int_{v_y}^{v_y + \tau_y} f^{(1)}(\delta_x + x, \delta_y + y) f^{(2)}(x, y) dx dy = 0,$$

где v_x, v_y — такие же, как и выше, а $\delta_x \in [-v_x, -v_x + t_x - \tau_x]$ и $\delta_y \in [-v_y, -v_y + t_y - \tau_y]$.

Дифференцируя это равенство по v_x и v_y , получаем следующую систему

УСЛОВИЙ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\tau_x} \int_0^{\tau_y} f^{(1)}(\Delta_x + x, \Delta_y + y) f^{(2)}(x, y) dx dy = 0, \\ \int_0^{\tau_x} \left(f^{(1)}(\Delta_x + x, \delta_y + v_y + \tau_y) f^{(2)}(x, v_y + \tau_y) - \right. \\ \quad \left. - f^{(1)}(\Delta_x + x, \delta_y + v_y) f^{(2)}(x, v_y) \right) dx = 0, \\ \int_0^{\tau_y} \left(f^{(1)}(\delta_x + v_x + \tau_x, \Delta_y + y) f^{(2)}(v_x + \tau_x, y) - \right. \\ \quad \left. - f^{(1)}(\delta_x + v_x, \Delta_y + y) f^{(2)}(v_x, y) \right) dy = 0, \\ f^{(1)}(\delta_x + v_x + \tau_x, \delta_y + v_y + \tau_y) f^{(2)}(v_x + \tau_x, v_y + \tau_y) - \\ - f^{(1)}(\delta_x + v_x, \delta_y + v_y + \tau_y) f^{(2)}(v_x, v_y + \tau_y) - \\ - f^{(1)}(\delta_x + v_x + \tau_x, \delta_y + v_y) f^{(2)}(v_x + \tau_x, v_y) + \\ + f^{(1)}(\delta_x + v_x, \delta_y + v_y) f^{(2)}(v_x, v_y) = 0. \end{array} \right.$$

Эту систему удобно переписать как

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\tau_x} \int_0^{\tau_y} f^{(1)}(\Delta_x + x, \Delta_y + y) f^{(2)}(x, y) dx dy = 0, \\ \int_0^{\tau_x} f^{(1)}(\Delta_x + x, \Delta_y + y) f^{(2)}(x, y) dx \text{ имеет период } \tau_y \text{ по } y, \\ \int_0^{\tau_y} f^{(1)}(\Delta_x + x, \Delta_y + y) f^{(2)}(x, y) dy \text{ имеет период } \tau_x \text{ по } x, \\ f^{(1)}(u_x + \tau_x, u_y + \tau_y) f^{(2)}(v_x + \tau_x, v_y + \tau_y) - \\ - f^{(1)}(u_x, u_y + \tau_y) f^{(2)}(v_x, v_y + \tau_y) - \\ - f^{(1)}(u_x + \tau_x, u_y) f^{(2)}(v_x + \tau_x, v_y) + \\ + f^{(1)}(u_x, u_y) f^{(2)}(v_x, v_y) = 0. \end{array} \right.$$

для любых $\Delta_x, u_x, v_x \in [t_x - \tau_x, t_x]$ и $\Delta_y, u_y, v_y \in [t_y - \tau_y, t_y]$. Аналогичные условия получаются и из системы равенств (19).

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Предложение 1. Пусть $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbf{C}^1([0, t_x] \times [0, t_y])$. Функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ разделимы тогда и только тогда, когда существуют $\tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y > 0$ такие, что $\tau_x/\tilde{\tau}_x, \tau_y/\tilde{\tau}_y, (t_x - \tau_x)/\tilde{\tau}_x$ и $(t_y - \tau_y)/\tilde{\tau}_y$ — целые числа, и выполняются следующие равенства:

$$(20) \quad \int_0^{\tilde{\tau}_x} \int_0^{\tilde{\tau}_y} f^{(1)}(\Delta_x + x, \Delta_y + y) f^{(2)}(x, y) dx dy = 0,$$

$$(21) \quad \int_0^{\tilde{\tau}_x} f^{(1)}(\Delta_x + x, \Delta_y + y) f^{(2)}(x, y) dx \text{ имеет период } \tilde{\tau}_y \text{ по } y,$$

$$(22) \quad \int_0^{\tilde{\tau}_y} f^{(1)}(\Delta_x + x, \Delta_y + y) f^{(2)}(x, y) dy \text{ имеет период } \tilde{\tau}_x \text{ по } x,$$

$$(23) \quad \begin{aligned} & f^{(1)}(u_x + \tilde{\tau}_x, u_y + \tilde{\tau}_y) f^{(2)}(v_x + \tilde{\tau}_x, v_y + \tilde{\tau}_y) - \\ & - f^{(1)}(u_x, u_y + \tilde{\tau}_y) f^{(2)}(v_x, v_y + \tilde{\tau}_y) - \\ & - f^{(1)}(u_x + \tilde{\tau}_x, u_y) f^{(2)}(v_x + \tilde{\tau}_x, v_y) + \\ & + f^{(1)}(u_x, u_y) f^{(2)}(v_x, v_y) = 0 \end{aligned}$$

для любых $0 \leq u_x, v_x, \Delta_x \leq \max(\tau_x, t_x - \tau_x)$ и $0 \leq u_y, v_y, \Delta_y \leq \max(\tau_y, t_y - \tau_y)$.

Замечание 4. Множество гладких функций, отделимых от данной, является линейным.

Замечание 5. В одномерном случае [5], функции $f^{(1)}, f^{(2)} \in C^1([0, t])$ τ -разделимы тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\tau_1} f^{(1)}(\Delta + z) f^{(2)}(z) dz = 0$$

для любого $0 \leq \Delta \leq \max(\tau, t - \tau)$ и функция $f^{(1)} \cdot f^{(2)}$ имеет период τ_1 на $[0, t]$, где τ_1 — такое положительное число, что τ/τ_1 и $(t - \tau)/\tau_1$ — целые числа.

2.3.4. Пример. Отделимость от константы. Перепишем условия разделимости для функций $f \in C^1([0, t_x] \times [0, t_y])$ и константы: существуют $\tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y > 0$ такие, что

$$(24) \quad \tau_x/\tilde{\tau}_x, (t_x - \tau_x)/\tilde{\tau}_x \in \mathbb{N},$$

$$(25) \quad \tau_y/\tilde{\tau}_y, (t_y - \tau_y)/\tilde{\tau}_y \in \mathbb{N}$$

и

$$(26) \quad \int_0^{\tilde{\tau}_x} \int_0^{\tilde{\tau}_y} f(x, y) dx dy = 0,$$

$$(27) \quad \int_0^{\tilde{\tau}_x} f(x, y) dx \text{ имеет период } \tilde{\tau}_y \text{ по } y,$$

$$(28) \quad \int_0^{\tilde{\tau}_y} f(x, y) dy \text{ имеет период } \tilde{\tau}_x \text{ по } x,$$

$$(29) \quad f(x + \tilde{\tau}_x, y + \tilde{\tau}_y) - f(x, y + \tilde{\tau}_y) - f(x + \tilde{\tau}_x, y) + f(x, y) = 0.$$

Замечание 6. Пусть $f \in \mathbf{C}^1([0, t_x] \times [0, t_y])$ — гладкое поле.

В случае, когда f имеет период $\tilde{\tau}_x$ по x , удовлетворяющий (24), тогда для отделимости от константы необходимо и достаточно выполнения условий (26) и (27).

Аналогично, когда f имеет период $\tilde{\tau}_y$ по y , удовлетворяющий (25), тогда для отделимости от константы необходимо и достаточно выполнения условий (26) и (28).

Если же f имеет соответствующие периоды и по x и по y , тогда необходимым и достаточным является условие (26).

Замечание 7. Заметим, что для выполнения условий разделимости не является необходимой периодичность f по x или по y . Например поле $x \cos(y) + y \cos(x)$ не имеет периода ни по x , ни по y , но оно отделимо от константы, если $t_x, t_y, \tau_x, \tau_y \in \{2\pi k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Для доказательства разделимости здесь проверка условий не нужна, достаточно воспользоваться леммой 5 и замечанием 4.

2.4. Поля конечного ранга

Так же, как и в одномерном случае, довольно важен класс полей, имеющих конечное количество слагаемых в разложении Шмидта.

2.4.1. Определения. Вспомогательные утверждения. Пусть, как и раньше,

$$\begin{aligned} D &= [0, t_x] \times [0, t_y], \\ D_1 &= [0, \tau_x] \times [0, \tau_y], \\ D_2 &= [0, t_x - \tau_x] \times [0, t_y - \tau_y], \\ \theta((u_x, u_y), (s_x, s_y)) &= (u_x + s_x, u_y + s_y). \end{aligned}$$

Рассмотрим $(D_1, \mathcal{B}_{D_1}, \text{mes}_{D_1}, D_2, \mathcal{B}_{D_2}, \text{mes}_{D_2}, D, \mathcal{B}_D, \theta)$ — аддитивный непрерывный вариант 2D-SSA.

Определение 2. Будем говорить, что поле $f \in \mathbf{L}^2(D, d\nu)$ имеет (τ_x, τ_y) -ранг d , если в правой части разложения Шмидта (11) стоит ровно d ненулевых слагаемых.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 6. 1. Если существуют $p_i \in \mathbf{L}_1^2$ и $q_i \in \mathbf{L}_2^2$, такие что

$$(30) \quad f(u_x + s_x, u_y + s_y) = \sum_{i=1}^r p_i(u_x, u_y) q_i(s_x, s_y),$$

где $(u_x, u_y) \in D_1$, $(s_x, s_y) \in D_2$ и равенство выполняется $\mu_1 \otimes \mu_2$ -почти везде, то поле имеет (τ_x, τ_y) -ранг, не превосходящий r . Более того, в разложении (11) каждая собственная функция ψ_j является линейной комбинацией функций p_i , а каждая факторная функция φ_j — линейной комбинацией q_i .

2. Если обе системы $\{p_i\}_{i=1}^r$ и $\{q_i\}_{i=1}^r$ линейно независимы, то поле имеет в точности (τ_x, τ_y) -ранг r .
3. Класс полей $f \in \mathbf{L}^2(D, d\nu)$, имеющих конечное число слагаемых в разложении Гильберта-Шмидта (11), замкнут относительно операций сложения и умножения.

Доказательство леммы 6. Не умаляя общности, можно считать, что система $\{q_i\}_{i=1}^r$ — ортонормированная. Тогда ядро g_{11} оператора $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ имеет вид:

$$g_{11}((u_x, u_y), (v_x, v_y)) = \sum_{i=1}^r p_i(u_x, u_y)p_i(v_x, v_y),$$

где $(u_x, u_y), (v_x, v_y) \in D_1$. Для любого $h \in \mathbf{L}_1^2$ верно

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^*h = \sum_{i=1}^r \langle p_i, h \rangle_1 \cdot p_i,$$

т.е. оператор $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ имеет конечную размерность, а значит число слагаемых в разложении (11) конечно. Остальные утверждения леммы очевидны.

В дальнейшем, для нахождения ранга полей понадобится следующая лемма:

Лемма 7. Пусть даны линейно независимые системы $\{p_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{L}_1^2$, $\{q_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{L}_2^2$ и $m \times n$ матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$. Пусть для некоторого поля f имеет место равенство

$$f(u_x + s_x, u_y + s_y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i(u_x, u_y) q_j(s_x, s_y),$$

где $(u_x, u_y) \in D_1$, $(s_x, s_y) \in D_2$ и равенство выполняется $\mu_1 \otimes \mu_2$ -почти везде.

Тогда (τ_x, τ_y) -ранг поля f равен рангу матрицы \mathbf{A} , в разложении (11) каждая собственная функция ψ_j является линейной комбинацией функций p_i , а каждая факторная функция φ_j — линейной комбинацией q_i .

Доказательство леммы 7. Пусть матрица \mathbf{A} имеет ранг r . Рассмотрим ее сингулярное разложение в матричной форме:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \mu_r & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} & \end{pmatrix} \mathbf{C},$$

где $\mathbf{D} = (d_{ij})_{i,j=1}^{m,m}$ и $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$ — ортогональные матрицы. Введем системы функций $\{p_i^{(1)}\}$ и $\{q_j^{(1)}\}$:

$$p_i^{(1)} = \mu_i \sum_{k=1}^m d_{ik} p_k,$$

$$q_j^{(1)} = \sum_{l=1}^n c_{jl} q_l.$$

Так как матрицы \mathbf{C} и \mathbf{D} ортогональные, эти системы будут линейно независимы. К тому же, будет выполняться:

$$f(u_x + s_x, u_y + s_y) = \sum_{i=1}^r p_i^{(1)}(u_x, u_y) q_i^{(1)}(s_x, s_y).$$

По лемме 6 каждая собственная функция ψ_j будет линейной комбинацией функций $p_i^{(1)}$, а значит и линейной комбинацией p_k . Аналогично для φ_j .

Замечание 8. Если поле имеет конечный ранг d , то, очевидно, имеет место представление (30).

Безусловно, довольно важным является класс полей, сохраняющих постоянный ранг при изменении размеров окна. Такие поля будем называть полями конечного ранга.

Определение 3. Будем говорить, что поле f имеет конечный ранг d , если для любых $(\tau_x, \tau_y) \in (0; t_x) \times (0; t_y)$ поле f имеет (τ_x, τ_y) -ранг d .

2.4.2. Бесконечные поля. Одна из поставленных задач в данной работе заключается в том, чтобы исследовать инвариантность свойств 2D-SSA в непрерывном случае относительно линейных преобразований аргументов функций (см. раздел 2.4.5). Для решения этой задачи необходимо рассматривать функции с более широкой областью определения, чем прямоугольник $[0, t_x) \times [0, t_y)$. Поэтому введем понятие *бесконечного поля* как функции $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, определим класс бесконечных полей, аналогичный классу полей конечного ранга, и докажем некоторые утверждения для этого класса.

Определение 4. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Будем называть f *бесконечным полем с конечным порядком, не превосходящим r* , если существуют такие $p_i(u_x, u_y) \in \mathbf{L}^{2,loc}$ и $q_i(s_x, s_y) \in \mathbf{L}^{2,loc}$, что выполняется равенство

$$(31) \quad f(u_x + s_x, u_y + s_y) = \sum_{i=1}^r p_i(u_x, u_y) q_i(s_x, s_y)$$

для всех $u_x, u_y, s_x, s_y \in \mathbb{R}$.

Определение 5. Будем говорить, что бесконечное поле (31) имеет *сильный порядок r* , если на любом прямоугольнике $\Delta = [u_1, u_2] \times [u_3, u_4]$ с ненулевыми размерами, т.е. $u_1 < u_2, u_3 < u_4$, системы $\{p_i|_{\Delta}\}_{i=1}^r$ и $\{q_i|_{\Delta}\}_{i=1}^r$ внутри линейно независимы.

Можно доказать, что если поле имеет сильный порядок r , то для любого компактного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ конечной ненулевой меры (Лебега) системы $\{p_i|_A\}_{i=1}^r$ и $\{q_i|_A\}_{i=1}^r$ внутри линейно независимы.

Замечание 9. Пусть f — бесконечное поле с порядком, не превосходящим r . Тогда для любых $t_x, t_y > 0$ и $0 < \tau_x < t_x, 0 < \tau_y < t_y$ конечное поле $f|_{[0, t_x) \times [0, t_y)}$ будет иметь конечный (τ_x, τ_y) -ранг, не превосходящий r . Если бесконечное поле имеет сильный порядок d , то ранг поля $f|_{[0, t_x) \times [0, t_y)}$ будет равен d , т.е. сужение бесконечного поля сильного порядка на прямоугольник будет полем конечного ранга, причем ранг будет равен порядку.

2.4.3. Полиномы. Будем обозначать $P_m(x, y)$ полиномы степени m от двух переменных. Удобно пользоваться такой записью:

$$P_m(x, y) = \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n a_{nk} x^k y^{n-k},$$

причем не все a_{mk} , $k = 0, \dots, m$, равны 0.

Предложение 2. 1. Бесконечное поле $P_m(x, y)$ имеет конечный порядок. Собственные и факторные функции — полиномы от двух переменных, со степенью не большей степени полинома.

2. Выполняется неравенство

$$m + 1 \leq d \leq \begin{cases} \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right) \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right) & \text{для четных } m, \\ \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right) \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2\right) & \text{для нечетных } m, \end{cases}$$

где d — сильный порядок $P_m(x, y)$.

Доказательство предложения 2.

1. Воспользуемся формулой Тейлора:

$$\begin{aligned} & P_m(u_x + s_x, u_y + s_y) = \\ &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n u_x^k u_y^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{\partial^n P_m}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \right) (s_x, s_y) = \\ (32) \quad &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n u_x^k u_y^{n-k} \sum_{h=0}^{m-n} \sum_{l=0}^h c_{nhkl} s_x^l s_y^{h-l} = \\ &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^{m-n} \sum_{l=0}^h c_{nhkl} u_x^k u_y^{n-k} s_x^l s_y^{h-l}, \end{aligned}$$

где коэффициенты c_{nhkl} можно выразить как

$$\begin{aligned} (33) \quad c_{nhkl} &= \frac{(l+k)!((h-l)+(n-k))!}{k!(n-k)!l!(h-l)!} \cdot a_{n+h,k+l} = \\ &= \mathbf{C}_{l+k}^l \mathbf{C}_{(h-l)+(n-k)}^{h-l} a_{n+h,k+l}, \end{aligned}$$

$$0 \leq n \leq m, 0 \leq h \leq m-n, 0 \leq k \leq n \text{ и } 0 \leq l \leq h.$$

Если положить

$$(34) \quad c_{nhkl} = 0, \text{ для } 0 \leq n \leq m, m-n < h \leq m \text{ и } k, l \in \mathbb{N},$$

то равенство (32) можно записать как

$$P_m(u_x + s_x, u_y + s_y) = \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^m \sum_{l=0}^h c_{nhkl} u_x^k u_y^{n-k} s_x^l s_y^{h-l}.$$

Введем вспомогательную биекцию $J : \{(n, k) : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, k \leq n\} \mapsto \mathbb{N}_0$:

$$(35) \quad J(n, k) = k + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Переобозначим с помощью нее функции и коэффициенты:

$$\begin{aligned} p_i(u_x, u_y) &= u_x^k u_y^{n-k}, \\ q_j(s_x, s_y) &= s_x^l s_y^{h-l}, \\ c_{ij}^{(1)} &= c_{nhkl}, \end{aligned}$$

где $i = J(n, k)$ и $j = J(h, l)$.

Тогда

$$P_m(u_x + s_x, u_y + s_y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} c_{ij}^{(1)} p_i(u_x, u_y) q_j(s_x, s_y),$$

где $M = (m+1)(m+2)/2$.

В силу леммы 7 первая часть предложения доказана.

2. По лемме 7, ранг поля $P_m(x, y)$ равен рангу матрицы $\mathbf{C} = \left(c_{ij}^{(1)} \right)_{i,j=0}^{M-1, M-1}$.

Заметим, что в силу (34) матрица \mathbf{C} имеет следующую блочную структуру:

$$(36) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \cdots & \cdots & \mathbf{B}_{0m} \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1,m-1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{m-1,0} & \mathbf{B}_{m-1,1} & \ddots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{B}_{m0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{B}_{nh} = \begin{pmatrix} c_{nh00} & c_{nh01} & \cdots & c_{nh0h} \\ c_{nh10} & c_{nh11} & \cdots & c_{nh1h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{nhn0} & c_{nhn1} & \cdots & c_{nhnh} \end{pmatrix}$$

есть матрица размера $(n+1) \times (h+1)$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \text{rank } \mathbf{C} &\leq \sum_{n=0}^m \min(n+1, m-n+1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (n+1) + \sum_{n=\lfloor m/2 \rfloor + 1}^m (m-n+1) = \\ &= \begin{cases} \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \right) \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \right) & \text{для четных } m, \\ \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \right) \left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \right) & \text{для нечетных } m. \end{cases} \end{aligned}$$

Кроме того, по (33) элементы блоков $\mathbf{B}_{n,m-n}$ для $0 \leq n \leq m$ выглядят так:

$$(\mathbf{B}_{n,m-n})_{kl} = \mathbf{C}_{l+k}^l \mathbf{C}_{m-k-l}^{m-n-l} a_{m,k+l},$$

а значит в матрицах $\mathbf{B}_{n,m-n}$ присутствуют все старшие коэффициенты полинома, т.е. a_{mr} , где $0 \leq r \leq m$. Так как среди старших коэффициентов есть хотя бы один ненулевой, $\mathbf{B}_{n,m-n} \neq \mathbf{0}$ для $0 \leq n \leq m$ и в матрице \mathbf{C} есть по крайней мере $m+1$ линейно независимых строк.

Замечание 10. В доказательстве предложения 2 приведен явный вид матрицы \mathbf{C} , его можно использовать для вычисления ранга полинома.

2.4.4. Линейные преобразования одномерных функций. Рассмотрим бесконечные поля, которые можно представить в виде линейного преобразования некоторой одномерной функции, т.е. $f(x, y) = \tilde{f}(ax + by)$. Далее будет показано, что разложение поля f можно выразить через разложение одномерной функции \tilde{f} .

Для начала определим понятие сильного порядка для функций $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Определение 6. Будем говорить, что функция $\tilde{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — сильного порядка d , если она имеет представление

$$\tilde{f}(\tilde{u} + \tilde{s}) = \sum_{i=1}^d \tilde{p}_i(\tilde{u}) \tilde{q}_i(\tilde{s}),$$

где $\tilde{u} \in \mathbb{R}$ и $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ и каждая из систем $\{\tilde{p}_i\}_{i=1}^d$ и $\{\tilde{q}_i\}_{i=1}^d$ является системой $\mathbf{L}^{2,\text{loc}}$ функций, сужения которых на любой отрезок $[s_1, s_2]$ ненулевой длины линейно независимы.

Предложение 3. Пусть задана функция $\tilde{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, \tilde{f} — сильного порядка d и $a, b \in \mathbb{R}$, такие что $a^2 + b^2 > 0$. Тогда бесконечное поле f , определенное как

$$(37) \quad f(x, y) = \tilde{f}(ax + by),$$

имеет сильный порядок d .

Доказательство предложения 3. Для f имеет место представление:

$$f(u_x + s_x, u_y + s_y) = \sum_{i=1}^d p_i(u_x, u_y) q_i(s_x, s_y),$$

где $p_i(u_x, u_y) = \tilde{p}_i(au_x + bu_y)$, $q_i(s_x, s_y) = \tilde{q}_i(as_x + bs_y)$ и $p_i, q_i \in \mathbf{L}^{2,\text{loc}}$.

Осталось доказать линейную независимость. Пусть напротив, например, $\{p_i\}_{i=1}^d$ линейно зависимы, т.е. существуют коэффициенты $\{\alpha_i\}_{i=1}^d$, не все равные нулю, и прямоугольник $\Delta = [u_1, u_2] \times [u_3, u_4]$, где $u_1 < u_2, u_3 < u_4$, такие что

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i p_i(u_x, u_y) \equiv 0 \text{ на } \Delta.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i \tilde{p}_i(\tilde{u}) \equiv 0 \text{ на } \tilde{\Delta}.$$

где $\tilde{\Delta} = \{z \in \mathbb{R} : z = ax + by, (x, y) \in \Delta\}$. Т.е. сужения $\{\tilde{p}_i\}_{i=1}^d$ на отрезок ненулевой длины линейно зависимы, что противоречит условию леммы.

По замечанию 9 очевидно следующее следствие.

Следствие 2. Для любого прямоугольника $[0, t_x) \times [0, t_y)$ и фиксированных размеров окна (τ_x, τ_y) , ограничение функции (37) на этот прямоугольник (т.е. $f|_{[0, t_x) \times [0, t_y)}$) будет полем (τ_x, τ_y) -ранга d .

Замечание 11. Для выполнения следствия 2 достаточно требовать, чтобы функция \tilde{f} была задана на конечном промежутке и имела конечный ранг при разложении непрерывным SSA с некоторым определенным окном на этом промежутке.

Пусть, например, $a, b > 0$. Обозначим $\tilde{t} = at_x + bt_y$ и $\tilde{\tau} = a\tau_x + b\tau_y$. Тогда, для того чтобы поле $f|_{[0, t_x) \times [0, t_y)}$ было полем конечного ранга, достаточно, чтобы \tilde{f} была определена на $[0, \tilde{t})$ и имела конечный ранг при разложении на $[0, \tilde{t})$ с окном $\tilde{\tau}$.

2.4.5. Линейные преобразования полей. Пусть имеется бесконечное поле \hat{f} . Будем рассматривать невырожденное линейное преобразование поля \hat{f} :

$$(38) \quad f(x, y) = \hat{f}(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2).$$

Невырожденность означает, что $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$.

Предложение 4. 1. Если поле \hat{f} — поле конечного порядка, то поле f , задаваемое (38), тоже является полем конечного порядка.

2. Если \hat{f} имеет сильный порядок d , то f тоже имеет сильный порядок d .

Доказательство предложения 4.

1. Поле \hat{f} — конечного порядка, следовательно имеет место разложение

$$\hat{f}(u_x + s_x, u_y + s_y) = \sum_{i=1}^r \hat{p}_i(u_x, u_y) \hat{q}_i(s_x, s_y).$$

Построим разложение поля f :

$$\begin{aligned} f(u_x + s_x, u_y + s_y) &= \hat{f}(a_1(u_x + s_x) + b_1(u_y + s_y) + c_1, \\ &\quad a_2(u_x + s_x) + b_2(u_y + s_y) + c_2) = \\ &= \sum_{i=1}^r p_i(u_x, u_y) q_i(s_x, s_y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p_i(u_x, u_y) &= \widehat{p}_i(a_1 u_x + b_1 u_y, a_2 u_x + b_2 u_y), \\ q_i(s_x, s_y) &= \widehat{q}_i(a_1 s_x + b_1 s_y + c_1, a_2 s_x + b_2 s_y + c_2). \end{aligned}$$

2. Отображение $\Phi : (x, y) \rightarrow (x^*, y^*)$ вида

$$\begin{aligned} x^* &= a_1 x + b_1 y + c_1^*, \\ y^* &= a_2 x + b_2 y + c_2^*, \end{aligned}$$

где c_1^*, c_2^* — произвольные коэффициенты, является невырожденным линейным преобразованием, а значит для прямоугольника $\Delta = [u_1, u_2] \times [u_3, u_4]$, где $u_1 < u_2, u_3 < u_4$,

$$\text{mes}(\Phi(\Delta)) = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| \cdot \text{mes}(\Delta) > 0.$$

Следовательно, линейная зависимость сужений $\{p_i\}_{i=1}^r$ на прямоугольник влечет линейную зависимость сужений $\{\widehat{p}_i\}_{i=1}^r$ на некоторое компактное множество ненулевой меры. То же верно и для $\{q_i\}_{i=1}^r$.

Таким образом, выполняются условия определения 5.

3. Дискретный случай

3.1. Пространства матриц

Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{M}_{m,n}$ вещественных $m \times n$ матриц со стандартными операциями сложения и умножения на константу. Очевидно, что размерность такого пространства равна mn , и оно изоморфно пространству \mathbb{R}^{mn} .

Поэтому удобно ввести операции сопоставления $m \times n$ матрицам векторов из \mathbb{R}^{mn} , и наоборот. Введем оператор векторизации [8, 11].

Определение 7. Векторизацией $m \times n$ матрицы $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ будем называть вектор, составленный из столбцов \mathbf{A} :

$$(39) \quad \text{vec } \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{11}, \dots, a_{m1}; a_{12}, \dots, a_{m2}; \dots; a_{1n}, \dots, a_{mn})^T.$$

Например,

$$\text{vec} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)^T.$$

Заметим, что оператор vec устанавливает взаимнооднозначное соответствие между векторами из \mathbb{R}^{mn} и матрицами $m \times n$. Поэтому можно ввести обратную операцию матрицирования вектора.

Определение 8. (m, n) -Матрицированием вектора $X \in \mathbb{R}^{mn}$ будем называть матрицу размера $m \times n$

$$(40) \quad \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \text{matr}_{m,n}(X),$$

такую что

$$\text{vec } \mathbf{A} = X.$$

Определим скалярное произведение матриц следующим образом. Пусть $\mathbf{X} = (x_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ и $\mathbf{Y} = (y_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ — матрицы из $\mathcal{M}_{m,n}$. Тогда

$$(41) \quad \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{ij} = \langle \text{vec } \mathbf{X}, \text{vec } \mathbf{Y} \rangle_2.$$

Стандартным образом равенство

$$(42) \quad \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{M}}^2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 = \|\text{vec}(\mathbf{X})\|_2^2$$

задает квадрат матричной нормы (обычно называемой *матричной нормой Фробениуса*), а тождество

$$(43) \quad \text{dist}_{\mathcal{M}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{\mathcal{M}}$$

имеет смысл расстояния между матрицами \mathbf{X} и \mathbf{Y} . Отметим, что с введенной метрикой пространство $\mathcal{M}_{m,n}$ изометрично пространству \mathbb{R}^{mn} . Также заметим, что скалярное произведение (41) не зависит от перестановки матричных элементов и, следовательно, не учитывает многие важные матричные характеристики, такие как, например, ранг матрицы.

Приведем некоторые утверждения для элементарных матриц ранга 1, т.е. матриц вида AB^T , где A и B — вектора в \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n соответственно.

Довольно очевидна следующая лемма.

Лемма 8. Пусть $A, B \in \mathbb{R}^m$ и $\langle A, B \rangle_2 = 0$. Тогда для любых $C, D \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle AC^T, BD^T \rangle_{\mathcal{M}} &= 0, \\ \langle CA^T, DB^T \rangle_{\mathcal{M}} &= 0. \end{aligned}$$

Будем обозначать $I_n \stackrel{\text{def}}{=} (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ вектор из единиц.

Лемма 9. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^k$ и $\{B_j\}_{j=1}^l$ — ортогональные системы векторов в \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n соответственно, а также $I_m \notin \text{span}(A_1, \dots, A_k)$. Тогда система матриц

$$(44) \quad \{A_1(I_n)^T, \dots, A_k(I_n)^T, I_m(B_1)^T, \dots, I_m(B_l)^T\}$$

линейно независима.

Доказательство леммы 9. Так как $I_m \notin \text{span}(A_1, \dots, A_k)$, существует ненулевой вектор $A_0 \in \mathbb{R}^m$, такой что

$$I_m = A_0 + \sum_{i=1}^k c_i A_i,$$

причем $A_0 \perp \text{span}(A_1, \dots, A_k)$. Приравняем линейную комбинацию векторов (44) нулю

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i (I_n)^T + \sum_{j=1}^l \beta_j I_m (B_j)^T = \\ (45) \quad &= \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i (I_n)^T + \sum_{j=1}^l \beta_j \left(A_0 + \sum_{i=1}^k c_i A_i \right) (B_j)^T = \\ &= \sum_{i=1}^k A_i \left(\alpha_i I_n + c_i \sum_{j=1}^l \beta_j B_j \right)^T + A_0 \left(\sum_{j=1}^l \beta_j B_j \right)^T. \end{aligned}$$

По лемме 8 все матричные слагаемые вида $A_i(\dots)^T$, для $1 \leq i \leq k$, в правой части уравнения (45) ортогональны, а значит уравнение эквивалентно следующей системе

$$(46) \quad \mathbf{0} = \sum_{i=1}^k A_i \left(\alpha_i I_n + c_i \sum_{j=1}^l \beta_j B_j \right)^T,$$

$$(47) \quad \mathbf{0} = \sum_{j=1}^l \beta_j A_0 (B_j)^T.$$

По лемме 8 в правой части уравнения (47) стоит линейная комбинация ортогональных матриц, которые являются к тому же ненулевыми, а значит, все β_j равны нулю. Тогда уравнение (46) можно переписать как

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i (I_n)^T,$$

причем в его правой части — тоже линейная комбинация ненулевых ортогональных матриц, откуда следует, что все α_i равны нулю. Таким образом, только тривиальная линейная комбинация матриц системы (44) равняется нулю, а значит система линейно независима.

Определим также операцию Кронекеровского произведения [8, 11].

Определение 9. Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ и $B = \{b_{kl}\}_{k,l=1}^{p,q}$ — две матрицы размера $m \times n$ и $p \times q$ соответственно. *Кронекеровским произведением* $A \otimes B$ называется матрица размера $mp \times nq$:

$$(48) \quad A \otimes B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Отметим некоторые свойства Кронекеровского произведения (их также можно найти в [11]):

1. Для любых $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{r,s}$, $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_{s,t}$ выполняется

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}.$$

2. Для любых матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T.$$

3. Для векторов $A = (a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ и $B = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (49) \quad A \otimes B &= (a_1 B^T; \dots; a_m B^T)^T = \\ &= (a_1 b_1, \dots, a_1 b_m; \dots; a_n b_1, \dots, a_n b_m)^T = \\ &= \text{vec}(BA^T) = \text{vec}(B \otimes (A^T)) = \text{vec}((A^T) \otimes B), \end{aligned}$$

или, что тоже самое

$$(50) \quad B \otimes (A^T) = (A^T) \otimes B = BA^T = \underset{m,n}{\text{matr}}(A \otimes B).$$

Следующее утверждение непосредственно не относится к скалярному и Кронекеровскому произведениям матриц, но оно также понадобится в дальнейшем.

Лемма 10. Пусть задана матрица $m \times m$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + CD^T,$$

где $C, D \in \mathbb{R}^m$. Тогда $\text{rank } \mathbf{A} \geq m - 1$.

Доказательство леммы 10. Рассмотрим $X \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\mathbf{A}X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X + CD^T X = X + C \langle D, X \rangle_2.$$

Таким образом, $\mathbf{A}X = X$ для $X \in (\text{span}(D))^\perp$, а значит верно

$$\text{rank } \mathbf{A} = \dim \text{Im } \mathbf{A} \geq \dim(\text{span}(D)^\perp) = m - 1,$$

что и требовалось доказать.

3.2. Переход с абстрактного языка на язык матриц

В дискретном случае рассматривается разложение функций, заданных на дискретной равномерной прямоугольной сетке, и все объекты, входящие в конструкцию алгоритма, имеют дискретную область задания. Поэтому более естественным для описания алгоритма, понятий и утверждений в дискретном случае является матричный язык.

В этом подразделе будет определен дискретный вариант конструкции 2D-SSA, а также объекты, которые необходимы для формального перехода с абстрактного языка на язык матриц. Далее уже в новых обозначениях будет подробно описан алгоритм и дальнейшие утверждения.

Считаем, что мы находимся в условиях раздела 2.2.. Будем рассматривать в качестве мер $\{\mu^\alpha\}_{\alpha>0}$ дискретные равномерные (считающие) меры, сконцентрированные на равномерной сетке с шагом Δ . Не умаляя общности, можно считать, что $\Delta = 1$. Таким образом, конструкция 2D-SSA Ω (9) определена.

Для перехода на язык матриц определим на некоторых дискретных пространствах другую конструкцию SSA Ω' , которая будет эквивалентна Ω . Рассмотрим дискретные пространства, соответствующие D_1, D_2 :

$$(51) \quad \begin{aligned} D'_1 &= \{0, \dots, L_x - 1\} \times \{0, \dots, L_y - 1\}, \\ D'_2 &= \{0, \dots, K_x - 1\} \times \{0, \dots, K_y - 1\}, \end{aligned}$$

где $L_x = \lceil \tau_x \rceil$, $L_y = \lceil \tau_x \rceil$, $K_x = \lceil t_x \rceil - \lceil \tau_x \rceil + 1$ и $K_y = \lceil t_y \rceil - \lceil \tau_y \rceil + 1$.

Пространству D будет соответствовать образ отображения θ

$$(52) \quad D' = \theta(D'_1 \times D'_2) = \{0, \dots, N_x - 1\} \times \{0, \dots, N_y - 1\},$$

где $N_x = \lceil t_x \rceil$, $N_y = \lceil t_y \rceil$.

На введенных дискретных пространствах определим конструкцию SSA Ω' :

$$\Omega' = (D'_1, 2^{D'_1}, \mu'_1, D'_2, 2^{D'_2}, \mu'_2, D', 2^{D'}, \theta|_{D'_1 \times D'_2}),$$

где $2^{D'_1}$, $2^{D'_2}$ и $2^{D'}$ (множества всех подмножеств) — естественные сигма-алгебры для дискретных пространств D'_1 , D'_2 и D' , а меры μ'_1 и μ'_2 — считающие меры

$$\begin{aligned} \mu'_1(A) &= |A|, A \subseteq D'_1, \\ \mu'_2(B) &= |B|, B \subseteq D'_2. \end{aligned}$$

Замечание 12. Заметим, что Ω' , так же как и Ω , является произведением некоторых одномерных конструкций SSA:

$$\begin{aligned} \Omega' &= (D'_{1x}, 2^{D'_{1x}}, \mu'_{1x}, D'_{2x}, 2^{D'_{2x}}, \mu'_{2x}, D'_x, 2^{D'_x}, \theta_x|_{D'_{1x} \times D'_{2x}}) \times \\ &\times (D'_{1y}, 2^{D'_{1y}}, \mu'_{1y}, D'_{2y}, 2^{D'_{2y}}, \mu'_{2y}, D'_y, 2^{D'_y}, \theta_y|_{D'_{1y} \times D'_{2y}}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D'_{1x} &= \{0, \dots, L_x - 1\}, \quad D'_{2x} = \{0, \dots, K_x - 1\}, \\ D'_{1y} &= \{0, \dots, L_y - 1\}, \quad D'_{2y} = \{0, \dots, K_y - 1\}, \\ D'_x &= \{0, \dots, N_x - 1\} = \theta_x(D'_{1x} \times D'_{2x}), \\ D'_y &= \{0, \dots, N_y - 1\} = \theta_y(D'_{1y} \times D'_{2y}), \end{aligned}$$

а μ'_{1x} , μ'_{2x} , μ'_{1y} и μ'_{2y} — соответствующие считающие меры.

Теперь, с помощью Ω' , опишем формальный переход от функций в абстрактном 2D-SSA к матрицам. Пространствам функций \mathbf{L}_1^2 , \mathbf{L}_2^2 и $\mathbf{L}(D, d\nu)$ в Ω соответствуют пространства в Ω' :

$$(53) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}_1'^2 & : \{0, \dots, L_x - 1\} \times \{0, \dots, L_y - 1\} \mapsto \mathbb{R}, \\ \mathbf{L}_2'^2 & : \{0, \dots, K_x - 1\} \times \{0, \dots, K_y - 1\} \mapsto \mathbb{R}, \\ \mathbf{L}^2(D', d\nu|_{(D', 2D')}) & : \{0, \dots, N_x - 1\} \times \{0, \dots, N_y - 1\} \mapsto \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Первые два пространства изометричны пространствам матриц \mathcal{M}_{L_x, L_y} и \mathcal{M}_{K_x, K_y} с нормой Фробениуса (42). Пространство $\mathbf{L}^2(D', d\nu) = \mathbf{L}^2(D', d\nu|_{2D'})$ изоморфно пространству матриц $N_x \times N_y$, однако норма, индуцированная из $\mathbf{L}^2(D', d\nu)$, не будет нормой Фробениуса. В разделе 3.4.1. будет определено скалярное произведение, порождающее эту норму.

Этап разложения состоит в разложении интегрального оператора $\mathbf{G} : \mathbf{L}_2^2 \mapsto \mathbf{L}_1^2$ (5) с ядром $g((u_x, u_y), (s_x, s_y)) = f(u_x + s_x, u_y + s_y)$. От разложения оператора \mathbf{G} перейдем к разложению его сужения $\mathbf{G}' : \mathbf{L}_2'^2 \mapsto \mathbf{L}_1'^2$. Так как пространства $\mathbf{L}_1'^2$ и $\mathbf{L}_2'^2$ — конечномерны, разложение интегрального оператора \mathbf{G}' эквивалентно сингулярному разложению матрицы линейного оператора \mathbf{G}' в некоторых заданных ортонормированных базисах пространств $\mathbf{L}_1'^2$ и $\mathbf{L}_2'^2$.

В качестве базиса пространства $\mathbf{L}_1'^2$ выберем $\{e_m^{(1)}\}_{m=1}^{L_x \cdot L_y}$, где

$$e_{i+(j-1) \cdot L_x}^{(1)}(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = i - 1 \text{ и } v = j - 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

для $1 \leq i \leq L_x$, $1 \leq j \leq L_y$ и $0 \leq u < L_x$, $0 \leq v < L_y$.

Базисному элементу $e_{i+(j-1) \cdot L_x}^{(1)}$ пространства $\mathbf{L}_1'^2$ соответствует матрица $E_{i,j}^{(1)} \in \mathcal{M}_{L_x, L_y}$, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента с индексами (i, j)

$$(54) \quad E_{i,j}^{(1)} = \begin{matrix} & & & j & & \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ i & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким же образом введем базис в пространстве $\mathbf{L}_2'^2$:

$$e_{k+(l-1) \cdot K_x}^{(2)}(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = k - 1 \text{ и } v = l - 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

для $1 \leq k \leq K_x$, $1 \leq l \leq K_y$ и $0 \leq u < K_x$, $0 \leq v < K_y$.

Базисным элементам $e_{k+(l-1) \cdot K_x}^{(2)}$ пространства $\mathbf{L}_2'^2$ также можно сопоставить матрицы $E_{k,l}^{(2)} \in \mathcal{M}_{K_x, K_y}$ вида (54).

Обозначим \mathbf{W} матрицу оператора \mathbf{G}' в базисах $\{e_m^{(1)}\}_{m=1}^{L_x \cdot L_y}$ и $\{e_n^{(2)}\}_{n=1}^{K_x \cdot K_y}$. Собственные и факторные функции ψ_k и ϕ_k разложения (11) можно получить

из сингулярного разложения $\mathbf{W} = \sum_{k=1}^d \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T$:

$$(55) \quad \psi_k = (e_1^{(1)}, \dots, e_{L_x \cdot L_y}^{(1)}) U_k = \sum_{l=1}^{L_x \cdot L_y} (U_k)_l e_l^{(1)},$$

$$(56) \quad \varphi_k = (e_1^{(2)}, \dots, e_{K_x \cdot K_y}^{(2)}) V_k = \sum_{l=1}^{K_x \cdot K_y} (V_k)_l e_l^{(2)},$$

причем λ_k будут собственными числами разложения (11).

Заметим, что оператор $\mathbf{G}' : \mathbf{L}'_2 \mapsto \mathbf{L}'_1$ изоморфен $(2, 2)$ -тензору \mathcal{X} :

$$(57) \quad \mathcal{X}_{kl}^{ij} = g((i-1, j-1), (k-1, l-1)) = f(i+k-2, j+l-2),$$

а матрица оператора \mathbf{W} во введенных базисах — матрицирование этого тензора:

$$(\mathbf{W})_{i+(j-1) \cdot L_x, k+(l-1) \cdot K_x} = \mathcal{X}_{kl}^{ij},$$

т.е. элементы матрицы \mathbf{W} имеют вид

$$(58) \quad (\mathbf{W})_{i+(j-1) \cdot L_x, k+(l-1) \cdot K_x} = f(i+k-2, j+l-2).$$

В этих равенствах $1 \leq i \leq L_x$, $1 \leq j \leq L_y$, $1 \leq k \leq K_x$ и $1 \leq l \leq K_y$. Подробнее структура матрицы \mathbf{W} будет исследована в разделе 3.3.

Этап восстановления также можно сформулировать в терминах матриц интегральных операторов. Рассмотрим шаг θ -проектирования (13) (далее будем называть его шагом ортогонального проектирования). Применение оператора проектирования (6) к сгруппированной компоненте $g_I = \sum_{k \in I} \sqrt{\lambda_k} \psi_k \otimes \varphi_k$ (12) эквивалентно проектированию матрицы $\mathbf{W}_I = \sum_{k \in I} \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T$ по норме Фробениуса на подпространство матриц вида (58). Затем матрице вида (58) однозначно сопоставляется поле $N_x \times N_y$. Этап восстановления будет более подробно описан в разделе 3.3.

Также приведем вид меры ν' . Она дискретная и в силу замечания 12 имеет вид

$$\nu'(\{(i, j)\}) = w^{(X)}(i) \cdot w^{(Y)}(j),$$

где $w^{(X)}(i)$ и $w^{(Y)}(j)$ — некоторые веса. Веса $w^{(X)}$ можно выразить так

$$(59) \quad w^{(X)}(i) = \begin{cases} i+1 & \text{для } 0 \leq i < L_x^*, \\ L_x^* & \text{для } L_x^* \leq i < K_x^*, \\ N_x - i & \text{для } K_x^* \leq i < N_x, \end{cases}$$

где $L_x^* = \min(L_x, K_x)$, $K_x^* = \max(L_x, K_x)$. Веса для $w^{(Y)}$ выражаются аналогично, формальной заменой в (59) всех символов x на y и i на j :

$$(60) \quad w^{(Y)}(j) = \begin{cases} j+1 & \text{для } 0 \leq j < L_y^*, \\ L_y^* & \text{для } L_y^* \leq j < K_y^*, \\ N_y - j & \text{для } K_y^* \leq j < N_y, \end{cases}$$

где $L_y^* = \min(L_y, K_y)$, $K_y^* = \max(L_y, K_y)$.

3.3. Алгоритм

Пусть имеется двумерное дискретное поле $f : \{0, \dots, N_x - 1\} \times \{0, \dots, N_y - 1\} \mapsto \mathbb{R}$, заданное матрицей

$$F = \begin{pmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \dots & f(0, N_y - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \dots & f(1, N_y - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N_x - 1, 0) & f(N_x - 1, 1) & \dots & f(N_x - 1, N_y - 1) \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее матрицу, задающую дискретное поле, будем также называть полем.

Пусть заданы параметры — *размеры окна* (L_x, L_y) , удовлетворяющие условиям $1 \leq L_x \leq N_x$, $1 \leq L_y \leq N_y$, $1 < L_x L_y < N_x N_y$. Положим $K_x = N_x - L_x + 1$ и $K_y = N_y - L_y + 1$. Также определим $L = L_x L_y$, $K = K_x K_y$.

3.3.1. Вложение. По матрице F строится аналог траекторной матрицы для одномерного случая — матрица \mathbf{W} размера $L \times K$:

$$(61) \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \dots & \mathbf{H}_{K_y-1} \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 & \dots & \mathbf{H}_{K_y} \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{H}_{L_y-1} & \mathbf{H}_{L_y} & \dots & \dots & \mathbf{H}_{N_y-1} \end{pmatrix}.$$

Она будет блочно-ганкелевой с ганкелевыми блоками размера $L_x \times K_x$

$$\mathbf{H}_j = \begin{pmatrix} f(0, j) & f(1, j) & \dots & f(K_x - 1, j) \\ f(1, j) & f(2, j) & \dots & f(K_x, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(L_x - 1, j) & f(L_x, j) & \dots & f(N_x - 1, j) \end{pmatrix},$$

причем каждый блок \mathbf{H}_j является одномерной траекторной матрицей ряда $f(\cdot, j)$, полученного из функции $f(i, j)$ при фиксированном j , т.е.

$$f(\cdot, j) = (f(0, j), f(1, j), \dots, f(N_x - 1, j)),$$

или, что то же самое, $(j + 1)$ -го столбца матрицы F .

Матрицу \mathbf{W} будем называть *блочно-ганкелевой траекторной матрицей*. Покажем, что все столбцы и строки можно получить векторизацией (39) некоторых подматриц исходного поля F . Обозначим W_m и W^n m -й столбец и n -ю строку матрицы \mathbf{W} соответственно:

$$(62) \quad \mathbf{W} = [W_1 : \dots : W_K] = [W^1 : \dots : W^L]^T.$$

Все столбцы W_m можно получить векторизацией (39) подматриц матрицы F размера $L_x \times L_y$:

$$W_{k+(l-1)K_x} = \text{vec}(F_{k,l})^T,$$

где $F_{k,l}$ — подматрица размера $L_x \times L_y$, взятая начиная с элемента F с индексом (k, l) ,

$$(63) \quad F_{k,l} = \begin{pmatrix} f(k-1, l-1) & \dots & f(k-1, l+L_y-2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(k+L_x-2, l-1) & \dots & f(k+L_x-2, l+L_y-2) \end{pmatrix},$$

где $1 \leq k \leq K_x$ и $1 \leq l \leq K_y$.

Таким же образом все строки W^n матрицы \mathbf{W} можно получить векторизацией подматриц $F^{i,j}$ размера $K_x \times K_y$:

$$(64) \quad W^{i+(j-1)L_x} = \text{vec}(F^{i,j})^T,$$

где $F^{i,j}$ — подматрица матрицы F размера $K_x \times K_y$, взятая начиная с элемента F с индексом (i, j) , $1 \leq i \leq L_x$ и $1 \leq j \leq L_y$.

Заметим, что для элементов подматриц выполняется равенство $(F^{i,j})_{k,l} = (F_{k,l})_{i,j}$. Следовательно, верно следующее замечание:

Замечание 13. Пусть \mathbf{W} — блочно-ганкелева траекторная матрица поля F для размеров окна (m, n) , и \mathbf{W}' — блочно-ганкелева траекторная матрица поля F для размеров окна $(N_x - m + 1, N_y - n + 1)$. Тогда

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}')^T.$$

Также напомним, что блочно-ганкелева траекторная матрица является представлением тензора четвертого порядка (57), причем его элементы естественным образом выражаются через элементы введенных подматриц:

$$\mathcal{X}_{kl}^{ij} = (F_{k,l})_{i,j} = (F^{i,j})_{k,l}.$$

Опишем также другое естественное представление тензора \mathcal{X} в виде блочной матрицы

$$(65) \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & \dots & F_{1,K_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{K_x,1} & F_{K_x,2} & \dots & F_{K_x,K_y} \end{pmatrix},$$

будем далее формулировать шаги алгоритма и в терминах таких матриц.

Матрицу \mathbf{X} (65) будем называть *двумерной траекторной матрицей*, по аналогии с одномерным случаем, где траекторная матрица получается последовательной записью скользящих отрезков ряда. Построение двумерной траекторной матрицы делается похожим образом: в блочную матрицу укладываются подматрицы, выделенные скользящим окном (см. рис. 1).

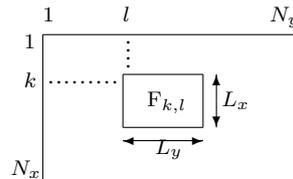


Рис. 1. Скользящее окно

Заметим, что \mathbf{X}^T будет двумерной траекторной матрицей поля F^T для размеров окна (L_y, L_x) .

3.3.2. Разложение. Следующим шагом является сингулярное разложение (SVD) блочно-ганкелевой траекторной матрицы:

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^d \mathbf{W}_i = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad \text{где}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ — все ненулевые собственные числа матрицы $\mathbf{W}\mathbf{W}^T$, упорядоченные по убыванию $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d > 0$; $\{U_1, \dots, U_d\}$, $U_i \in \mathbb{R}^L$ — ортонормированная система *собственных векторов* матрицы $\mathbf{W}\mathbf{W}^T$, а $\{V_1, \dots, V_d\}$ — ортонормированная система векторов в \mathbb{R}^K ,

$$V_i = \mathbf{W}^T U_i / \sqrt{\lambda_i},$$

будем их называть *факторными векторами*.

Сингулярному разложению матрицы \mathbf{W} соответствует разложение двумерной траекторной матрицы \mathbf{X} в сумму Кронекеровских произведений (48):

$$(66) \quad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \mathbf{X}_i = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} \Phi_i \otimes \Psi_i, \quad \text{где}$$

$$\Psi_i = \text{matr}_{L_x, L_y} U_i,$$

$$\Phi_i = \text{matr}_{K_x, K_y} V_i.$$

Матрицы Ψ_i и Φ_i имеют размеры $L_x \times L_y$ и $K_x \times K_y$, их можно записать как

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \psi_i(0, 0) & \psi_i(0, 1) & \dots & \psi_i(0, L_y - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_i(L_x - 1, 0) & \psi_i(L_x - 1, 1) & \dots & \psi_i(L_x - 1, L_y - 1) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i(0, 0) & \varphi_i(0, 1) & \dots & \varphi_i(0, K_y - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_i(K_x - 1, 0) & \varphi_i(K_x - 1, 1) & \dots & \varphi_i(K_x - 1, K_y - 1) \end{pmatrix},$$

где $\psi_i : \{0, \dots, L_x - 1\} \times \{0, \dots, L_y - 1\} \mapsto \mathbb{R}$ — собственные функции (55), а $\varphi_i : \{0, \dots, K_x - 1\} \times \{0, \dots, K_y - 1\} \mapsto \mathbb{R}$ — факторные функции (56). Будем называть Ψ_i и Φ_i — *собственными* и *факторными* полями соответственно. Также будем называть $(\sqrt{\lambda_i}, \Psi_i, \Phi_i)$ *i-й собственной тройкой*, а поле $\sqrt{\lambda_i} \Phi_i$ — *полем главных компонент*.

Разложение (66) называется Кронекеровским сингулярным разложением (KP-SVD, или Kronecker-product SVD). Оно является биортогональным и оптимальным в смысле приближения матрицы \mathbf{X} суммами Кронекеровских произведений (это показано в [2]):

$$\|\mathbf{X} - \sqrt{\lambda_1} \Phi_1 \otimes \Psi_1\|_{\mathcal{M}} = \min_{(A_1, B_1) \in \mathcal{P}_1} \|\mathbf{X} - A_1 \otimes B_1\|_{\mathcal{M}},$$

где $\mathcal{P}_1 = \mathcal{M}_{K_x, K_y} \times \mathcal{M}_{L_x, L_y}$, и

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{X} - \sqrt{\lambda_k} \Phi_k \otimes \Psi_k\|_{\mathcal{M}} = \\ & = \min_{(A_k, B_k) \in \mathcal{P}_k} \left\| \mathbf{X} - \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{\lambda_i} \Phi_i \otimes \Psi_i - A_k \otimes B_k \right\|_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{P}_k = \{(A_k, B_k) \in \mathcal{M}_{K_x, K_y} \times \mathcal{M}_{L_x, L_y} : A_k \perp \text{span}(\Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}), B_k \perp \text{span}(\Psi_1, \dots, \Psi_{k-1})\}$.

Стоит отметить, что такое представление этапа разложения делает очевидной инвариантность метода относительно перестановки аргументов, или транспонирования матрицы F , так как результат KP-SVD существенно не меняется при транспонировании (в силу свойств Кронекеровского произведения).

3.3.3. Группировка. Для дискретного случая группировку по m наборам индексов

$$\begin{aligned} I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m &= \{1, \dots, d\}, \\ I_k \cap I_l &= \emptyset \quad \text{для } k \neq l, \end{aligned}$$

можно записать как в терминах блочно-ганкелевой траекторной матрицы

$$(67) \quad \mathbf{W} = \sum_{k=1}^m \mathbf{W}_{I_k}, \quad \text{где } \mathbf{W}_I = \sum_{i \in I} \mathbf{W}_i,$$

так и в терминах двумерной траекторной матрицы

$$(68) \quad \mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{I_k}, \quad \text{где } \mathbf{X}_I = \sum_{i \in I} \mathbf{X}_i.$$

3.3.4. Ортогональное проектирование. Проектирование для сгруппированной компоненты \mathbf{W}_I в разложении (67) (или \mathbf{X}_I в разложении (68)) производится проектированием матрицы \mathbf{W}_I по норме Фробениуса на множество блочно-ганкелевых матриц вида (61) (что эквивалентно проектированию матрицы \mathbf{X}_I по норме Фробениуса на множество матриц вида (65)) и получением матрицы исходного поля F по взаимнооднозначному соответствию матриц вида (61) и (65) матрицам $N_x \times N_y$.

Для начала рассмотрим более общее определение оператора ганкелизации [7].

Определение 10. Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{M,N} \in M_{M,N}(Q)$ — матрица над евклидовым пространством Q . Тогда оператором ганкелизации (диагонального усреднения) $\mathcal{H}^Q : M_{M,N}(Q) \mapsto M_{M,N}(Q)$ будем называть

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^Q A &= \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \dots & \tilde{a}_N \\ \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & \dots & \tilde{a}_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_M & \tilde{a}_{M+1} & \dots & \tilde{a}_{M+N-1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{a}_k &= \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{D}_k} a_{ij} \right) / |\mathcal{D}_k|, \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}_k = \{(i, j) : 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N, i + j = k + 1\}$.

Рассмотрим более подробно этап проектирования в терминах блочно-ганкелевых матриц. Пусть есть компонента разложения, представленная в блочном виде:

$$\mathbf{W}_I = \begin{pmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,K_y} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \dots & W_{2,K_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{L_y,1} & W_{L_y,2} & \dots & W_{L_y,K_y} \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$W_{i,j}$ — блоки $L_x \times K_x$.

Тогда проектирование будет эквивалентно последовательному применению операторов ганкелизации:

1. Ганкелизация внутри блоков

К каждому блоку применяется оператор ганкелизации $W'_{i,j} = \mathcal{H}^{\mathbb{R}} W_{i,j}$, в результате получается матрица

$$\mathbf{W}'_I = \mathcal{H}_w^{\mathbb{R}} \mathbf{W}_I \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} W'_{1,1} & W'_{1,2} & \dots & W'_{1,K_y} \\ W'_{2,1} & W'_{2,2} & \dots & W'_{2,K_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W'_{L_y,1} & W'_{L_y,2} & \dots & W'_{L_y,K_y} \end{pmatrix}.$$

2. Ганкелизация по блокам

Блочная матрица \mathbf{W}'_I рассматривается как матрица над евклидовым пространством \mathcal{M}_{L_x, K_x} ,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_I = \mathcal{H}^{\mathcal{M}_{L_x, K_x}} \mathbf{W}'_I = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{H}}_0 & \widetilde{\mathbf{H}}_1 & \dots & \widetilde{\mathbf{H}}_{K_y-1} \\ \widetilde{\mathbf{H}}_1 & \widetilde{\mathbf{H}}_2 & \dots & \widetilde{\mathbf{H}}_{K_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\mathbf{H}}_{L_y-1} & \widetilde{\mathbf{H}}_{L_y} & \dots & \widetilde{\mathbf{H}}_{N_y-1} \end{pmatrix},$$

т.е. блоки матрицы \mathbf{W}'_I усредняются между собой для получения блочно-ганкелевой матрицы, которой затем можно однозначно сопоставить восстановленное поле F_I .

Заметим, что операции **1** и **2** можно применять в любом порядке

$$\widetilde{\mathbf{W}}_I = \mathcal{H}^{\mathcal{M}_{L_x, K_x}} \circ \mathcal{H}_w^{\mathbb{R}} (\mathbf{W}_I) = \mathcal{H}_w^{\mathbb{R}} \circ \mathcal{H}^{\mathcal{M}_{L_x, K_x}} (\mathbf{W}_I).$$

Проектирование в терминах двумерных траекторных матриц более удобно записать переходя сразу к восстановленному полю. Пусть

$$(69) \quad \mathbf{X}_I = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,K_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{K_x,1} & X_{K_x,2} & \dots & X_{K_x,K_y} \end{pmatrix} -$$

компонента разложения (68), с блоками $L_x \times L_y$.

Тогда элементы восстановленного поля F_I будут иметь вид:

$$\begin{aligned} f_I(i, j) &= \frac{1}{|\mathfrak{J}(i, j)|} \sum_{(u, v, k, l) \in \mathfrak{J}(i, j)} (X_{k, l})_{uv}, \\ \mathfrak{J}(i, j) &= \{(u, v, k, l) : \\ & 1 \leq u \leq L_x, 1 \leq v \leq L_y, \\ & 1 \leq k \leq K_x, 1 \leq l \leq K_y, \\ & (k - 1) + (u - 1) = i, (l - 1) + (v - 1) = j\}. \end{aligned}$$

Таким образом мы переходим к разложению исходного поля на составляющие

$$F = \sum_{k=1}^m F_{I_k}.$$

3.4. Разделимость

Понятие разделимости определено для общего случая 2D-SSA в разделе 2.3. Перенесем его на язык матриц для дискретного случая. Пусть размеры окна (L_x, L_y) фиксированы.

Определение 11. *Траекторным пространством* поля F будем называть линейную оболочку всех его подматриц $L_x \times L_y$, т.е.

$$(70) \quad \mathcal{L}^{(L_x, L_y)} = \mathcal{L}^{(L_x, L_y)}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(\{F_{k, l}\}_{k, l=1}^{K_x, K_y}).$$

Заметим, что $\mathcal{L}^{(L_x, L_y)}(F) = \text{span}(\{\Psi_i\}_{i=1}^d)$, т.е. траекторное пространство является линейной оболочкой матриц собственных полей Ψ_i . В силу (50) траекторное пространство изометрично линейной оболочке собственных векторов, т.е. $\text{vec}(\mathcal{L}^{(L_x, L_y)}(F))$ совпадает с линейной оболочкой столбцов W_m (62) блочно-ганкелевой траекторной матрицы.

Аналогично, пространство $\mathcal{L}^{(K_x, K_y)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(\{F^{i, j}\}_{i, j=1}^{L_x, L_y})$ (иными словами, траекторное пространство для размеров окна (K_x, K_y)) является линейной оболочкой матриц факторных полей Φ_i . Также верно равенство для строк W^n (64) траекторной матрицы: $\text{vec}(\mathcal{L}^{(K_x, K_y)}(F)) = \text{span}(\{W^n\}_{n=1}^{L_x L_y})$.

Пусть $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ — поля размера $N_x \times N_y$ и $F = F^{(1)} + F^{(2)}$. Эти поля порождают траекторные пространства $\mathcal{L}^{(L_x, L_y, i)}$ и $\mathcal{L}^{(K_x, K_y, i)}$, $i = 1, 2$, которые изометричны пространствам $\mathcal{L}_{\psi}^{(i)}$ (16) и $\mathcal{L}_{\varphi}^{(i)}$ соответственно. Сформулируем определение разделимости в терминах траекторных пространств.

Определение 12. Будем говорить, что поля $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ — *слабо разделимы окном* (L_x, L_y) (или просто *слабо разделимы*), если $\mathcal{L}^{(L_x, L_y, 1)} \perp \mathcal{L}^{(L_x, L_y, 2)}$ и $\mathcal{L}^{(K_x, K_y, 1)} \perp \mathcal{L}^{(K_x, K_y, 2)}$.

Также сформулируем на дискретном языке условие разделимости:

Предложение 5. Поля $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ слабо разделимы окном (L_x, L_y) тогда и только тогда, когда всевозможные их подматрицы размера $L_x \times L_y$ и $K_x \times K_y$ ортогональны, т.е.

$$(71) \quad \left\langle F_{k_1, l_1}^{(1)}, F_{k_2, l_2}^{(2)} \right\rangle_{\mathcal{M}_{L_x, L_y}} = 0, \text{ для } 1 \leq k_1, k_2 \leq K_x, 1 \leq l_1, l_2 \leq K_y,$$

$$(72) \quad \left\langle F^{(1), i_1, j_1}, F^{(2), i_2, j_2} \right\rangle_{\mathcal{M}_{K_x, K_y}} = 0, \text{ для } 1 \leq i_1, i_2 \leq L_x, 1 \leq j_1, j_2 \leq L_y.$$

Как и раньше, верно следующее замечание

Замечание 14. Множество полей, отделимых от данного, является линейным.

3.4.1. Взвешенная корреляция. Пусть имеются поля $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$.

Определение 13. Взвешенным скалярным произведением полей $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ будем называть

$$\begin{aligned} \left\langle F^{(1)}, F^{(2)} \right\rangle_w &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} f^{(1)}(i, j) \cdot f^{(2)}(i, j) \cdot w^{(X)}(i) \cdot w^{(Y)}(j) = \\ &= \left\langle \mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)} \right\rangle_{\mathcal{M}} = \left\langle \mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{W}^{(2)} \right\rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

где веса $w^{(X)}$ и $w^{(Y)}$ определены в (59).

Другими словами, взвешенное скалярное произведение есть скалярное произведение полей $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ в $\mathbf{L}^2(D', d\nu')$. Очевидно верно следующее утверждение.

Предложение 6. Если поля $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ разделимы, то $\left\langle F^{(1)}, F^{(2)} \right\rangle_w = 0$. Иными словами, взвешенная некоррелированность полей является необходимым условием их разделимости.

3.4.2. Разделимость произведения рядов. Следствием леммы 5 является следующее утверждение для дискретного случая:

Предложение 7. Для разделимости полей

$$\begin{aligned} f^{(1)}(i, j) &= f^{(X,1)}(i) \cdot f^{(Y,1)}(j), \\ f^{(2)}(i, j) &= f^{(X,2)}(i) \cdot f^{(Y,2)}(j) \end{aligned}$$

окном (L_x, L_y) достаточно разделимости одной из пар рядов $f^{(X,1)}(i)$, $f^{(X,2)}(i)$ или $f^{(Y,1)}(j)$, $f^{(Y,2)}(j)$ окном L_x или L_y соответственно. Однако это условие, в силу замечания 3, не является необходимым.

На основе полученного утверждения можно рассмотреть следующий пример, аналогичный примеру из непрерывного случая:

Пример 1. Поле $f(i, j) = \ln(i+1) \cos(2\pi\omega_y j) + \cos(2\pi\omega_x i) \ln(j+1)$ отделимо от константы при некоторых ω_x, ω_y (для которых одномерные ряды отделимы от константы), однако (как и в примере из замечания 7) не имеет периода ни по i , ни по j .

3.5. Поля конечного ранга

Сформулируем для дискретного случая понятие поля конечного ранга, введенное в разделе 2.4. для непрерывного случая. Для начала определим понятие ранга поля и сформулируем некоторые утверждения для его нахождения.

3.5.1. Ранг поля. Вспомогательные утверждения. Пусть фиксированы размеры окна (L_x, L_y) .

Определение 14. Если размерность траекторного пространства (70) равна d , то будем называть d (L_x, L_y) -рангом поля:

$$\text{rank}_{L_x, L_y}(\mathbf{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{L}^{(L_x, L_y)} = d.$$

Очевидно, что $0 \leq d \leq \min(L, K)$.

Так же, как и в непрерывном случае, имеет место следующее утверждение, аналогичное лемме 6.

Предложение 8. Если для фиксированных размеров окна (L_x, L_y) двумерная траекторная матрица поля \mathbf{F} раскладывается в сумму Кронекеровских произведений

$$(73) \quad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^m \mathbf{Q}_i \otimes \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_i \in \mathcal{M}_{L_x, L_y}, \mathbf{Q}_i \in \mathcal{M}_{K_x, K_y},$$

то ранг поля \mathbf{F} не превосходит число слагаемых m . Если к тому же системы $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^m$ и $\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^m$ линейно независимы, то $\text{rank}_{L_x, L_y}(\mathbf{F}) = m$.

Также верно утверждение, аналогичное лемме 7, с помощью которого удобно находить (L_x, L_y) -ранг.

Предложение 9. Если для фиксированных размеров окна (L_x, L_y) двумерная траекторная матрица поля \mathbf{F} раскладывается в сумму Кронекеровских произведений

$$\mathbf{X} = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} \mathbf{Q}_j \otimes \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_i \in \mathcal{M}_{L_x, L_y}, \mathbf{Q}_j \in \mathcal{M}_{K_x, K_y},$$

где системы $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^m$ и $\{\mathbf{Q}_j\}_{j=1}^n$ линейно независимы, то ранг поля \mathbf{F} равен рангу матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

Доказательства предложений 8 и 9 аналогичны доказательствам лемм 6 и 7.

Нижнюю границу для ранга поля в предложении 8 можно найти и если системы $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^m$ и $\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^m$ линейно зависимы. Например, верно следующее утверждение.

Предложение 10. Пусть имеется поле \mathbf{F} , двумерная траекторная матрица которого имеет разложение (73), причем

$$\dim \text{span}(\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^m) = \dim \text{span}(\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1}^m) = m - 1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\text{rank}_{L_x, L_y}(\mathbf{F}) \geq m - 2.$$

Доказательство предложения 10. По условиям предложения существуют такие $1 \leq k, l \leq m$, что $P_k \in \text{span}(\{P_i\}_{i \neq k})$ и $Q_l \in \text{span}(\{Q_j\}_{j \neq l})$, а системы $\{P_i\}_{i \neq k}$ и $\{Q_j\}_{j \neq l}$ линейно независимы. Рассмотрим два случая

1. $k \neq l$

Не умаляя общности, можно считать, что $k = m$ и $l = m - 1$. Обозначим

$$Q'_j = \begin{cases} Q_j, & \text{для } 1 \leq j \leq m - 2, \\ Q_m, & \text{для } j = m - 1. \end{cases}$$

Тогда матрицы P_m и Q_{m-1} можно выразить как $P_m = \sum_{i=1}^{m-1} c_i P_i$ и $Q_{m-1} = \sum_{j=1}^{m-1} d_j Q'_j$. Подставляя эти линейные комбинации в разложение (73), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{i=1}^{m-2} Q'_i \otimes P_i + \left(\sum_{j=1}^{m-1} d_j Q'_j \right) \otimes P_{m-1} + \\ &+ Q'_{m-1} \otimes \left(\sum_{i=1}^{m-1} c_i P_i \right) = \sum_{i,j=1}^{m-1, m-1} a_{ij} Q'_j \otimes P_i, \end{aligned}$$

где матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m-1, m-1}$ из предложения 9 имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{m-2} \\ d_1 & \dots & d_{m-2} & c_{m-1} + d_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\text{rank}_{L_x, L_y}(\mathbf{F}) = \text{rank } \mathbf{A} \geq m - 2$.

2. $k = l$

В этом случае можно считать, что $k = l = m$. Тогда $P_m = \sum_{i=1}^{m-1} c_i P_i$ и $Q_m = \sum_{j=1}^{m-1} d_j Q_j$, а значит двумерная траекторная матрица имеет разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{i=1}^{m-2} Q_i \otimes P_i + \left(\sum_{j=1}^{m-1} d_j Q_j \right) \otimes \left(\sum_{i=1}^{m-1} c_i P_i \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{m-1, m-1} a_{ij} Q_j \otimes P_i, \end{aligned}$$

где матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m-1, m-1}$ из предложения 9 имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{pmatrix} (d_1, \dots, d_{m-1}).$$

По лемме 10 $\text{rank}_{L_x, L_y}(\mathbf{F}) = \text{rank } \mathbf{A} \geq m - 2$.

3.5.2. Определение. Теперь введем определение полей конечного ранга для произвольных размеров окна, аналогичное определению 3.

В отличие от непрерывного случая, (L_x, L_y) -ранг поля не может превосходить $\min(L, K)$, поэтому введем определение, аналогичное определению для дискретного случая, т.е. определим поле конечного ранга как поле, для которого (L_x, L_y) -ранг не меняется в определенной области значений параметров (L_x, L_y) . Выберем эту область прямоугольной (см. рис. 2).

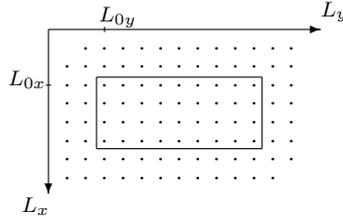


Рис. 2. Поля конечного ранга: область значений параметров

Определение 15. Будем говорить, что F — поле конечного ранга, если существуют такие d, L_{x0}, L_{y0} , что

$$\begin{aligned} 1 &\leq L_{x0} < \lfloor N_x/2 \rfloor, \\ 1 &\leq L_{y0} < \lfloor N_y/2 \rfloor, \\ 1 &\leq d \leq L_{x0} \cdot L_{y0}, \end{aligned}$$

и для любых L_x, L_y , для которых выполняется

$$L_{x0} \leq \min(L_x, K_x), \quad L_{y0} \leq \min(L_y, K_y),$$

имеет место равенство $\text{rank}_{L_x, L_y}(F) = d$.

3.5.3. Произведение рядов.

Определение 16. Поле $f(i, j) = f^{(X)}(i) \cdot f^{(Y)}(j)$, где

$$\begin{aligned} F^{(X)} &= F_{N_x}^{(X)} = (f^{(X)}(0), \dots, f^{(X)}(N_x - 1))^T, \\ F^{(Y)} &= F_{N_y}^{(Y)} = (f^{(Y)}(0), \dots, f^{(Y)}(N_y - 1))^T \end{aligned}$$

два одномерных ряда, будем называть *произведением рядов*. Матрица для поля $f(i, j)$ будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} F &= F^{(X)}(F^{(Y)})^T = \\ &= \begin{pmatrix} f^{(X)}(0)f^{(Y)}(0) & \dots & f^{(X)}(0)f^{(Y)}(N_y - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(X)}(N_x - 1)f^{(Y)}(0) & \dots & f^{(X)}(N_x - 1)f^{(Y)}(N_y - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть фиксированы размеры окна (L_x, L_y) , и траекторными матрицами рядов являются

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(X)} &= [X_1 : \dots : X_{K_x}] = [X^1 : \dots : X^{L_x}]^T, \\ \mathbf{W}^{(Y)} &= [Y_1 : \dots : Y_{K_y}] = [Y^1 : \dots : Y^{L_y}]^T. \end{aligned}$$

Тогда блочно-ганкелева траекторная матрица \mathbf{W} поля $f(i, j) = f^{(X)}(i) \cdot f^{(Y)}(j)$ будет иметь вид

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(Y)} \otimes \mathbf{W}^{(X)}.$$

Пусть матрицы имеют сингулярные разложения

$$(74) \quad \begin{aligned} \mathbf{W}^{(X)} &= \sum_{m=1}^{d_x} \sqrt{\lambda_m^{(X)}} U_m^{(X)} V_m^{(X)\top}, \\ \mathbf{W}^{(Y)} &= \sum_{n=1}^{d_y} \sqrt{\lambda_n^{(Y)}} U_n^{(Y)} V_n^{(Y)\top}. \end{aligned}$$

По теореме 13.10 из [11]

$$(75) \quad \mathbf{W} = \sum_{m=1}^{d_x} \sum_{n=1}^{d_y} \sqrt{\lambda_m^{(X)} \lambda_n^{(Y)}} (U_n^{(Y)} \otimes U_m^{(X)}) (V_n^{(Y)} \otimes V_m^{(X)})^\top$$

будет сингулярным разложением матрицы \mathbf{W} , с точностью до переупорядочения собственных чисел/векторов,

Собственными числами $\lambda_{m,n}$ будут всевозможные произведения собственных чисел рядов $\lambda_{m,n} = \lambda_m^{(X)} \lambda_n^{(Y)}$. Соответствующие собственные и факторные поля (в силу (50)) будут выражаться так:

$$(76) \quad \begin{aligned} \Psi_{m,n} &= \text{matr}_{L_x, L_y} (U_n^{(Y)} \otimes U_m^{(X)}) = U_m^{(X)} (U_n^{(Y)})^\top, \\ \Phi_{m,n} &= \text{matr}_{L_x, L_y} (V_n^{(Y)} \otimes V_m^{(X)}) = V_m^{(X)} (V_n^{(Y)})^\top. \end{aligned}$$

Более того, для поля, восстановленного по набору двумерных индексов $I \times J$, где $I \subseteq \{1, \dots, d_x\}$ и $J \subseteq \{1, \dots, d_y\}$, т.е. поля, восстановленного по набору собственных троек $(\sqrt{\lambda_{m,n}}, \Psi_{m,n}, \Phi_{m,n})$, $(n, m) \in I \times J$, будет выполняться равенство

$$F^{I \times J} = F_I^{(X)} (F_J^{(Y)})^\top,$$

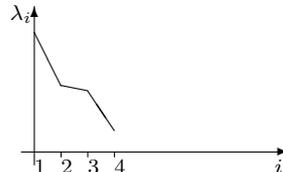
где $F_I^{(X)}$ и $F_J^{(Y)}$ — восстановленные ряды по наборам индексов I и J .

Заметим, что этот результат можно получить и из общей леммы 3 о разложении произведения функций. Также стоит отметить, что ранг поля равен произведению рангов рядов (т.е. в случае рядов конечного ранга ранг поля тоже будет конечным).

Рассмотрим в качестве примера поле $f(i, j)$, являющееся произведением двух синусов $f^{(X)}(i) = \sin(ai + b)$ и $f^{(Y)}(j) = \sin(cj + d)$. Оба ряда имеют ранг два, и у каждого ряда собственные числа близки, но вообще говоря, могут быть различны. Пусть при заданных размерах окна (L_x, L_y) ряд $f^{(X)}$ имеет собственные числа $\lambda_x, \lambda_x + \delta_x$, а ряд $f^{(Y)}$ — собственные числа $\lambda_y, \lambda_y + \delta_y$. Предположим для определенности, что $\lambda_x \delta_y \geq \lambda_y \delta_x$.

Тогда собственными числами поля $f(i, j)$ при данных размерах окна, расположенными в порядке убывания, будут

$$\begin{aligned} &\lambda_x \lambda_y + \lambda_x \delta_y + \lambda_y \delta_x + \delta_x \delta_y, \\ &\lambda_x \lambda_y + \lambda_x \delta_y, \\ &\lambda_x \lambda_y + \lambda_y \delta_x, \\ &\lambda_x \lambda_y; \end{aligned}$$



здесь справа приведен график собственных чисел. Заметим, что разница между минимальным и максимальным числами четверки собственных чисел, соответствующих произведению синусов, будет больше, чем разница между собственными числами в одномерном случае. Это затрудняет идентификацию компонент, соответствующих произведению синусов.

Можно рассмотреть другие произведения рядов, например, одномерных линейных функций. В этом случае в разложении каждой функции обычно есть большое собственное число и маленькое, поэтому среди собственных чисел произведения этих рядов будут очень маленькие числа, которые будут перемешиваться с шумом, если такой есть.

3.5.4. Сумма рядов.

Определение 17. Поле $f(i, j) = f^{(X)}(i) + f^{(Y)}(j)$ для рядов

$$\begin{aligned} F^{(X)} &= F_{N_x}^{(X)} = (f^{(X)}(0), \dots, f^{(X)}(N_x - 1))^T, \\ F^{(Y)} &= F_{N_y}^{(Y)} = (f^{(Y)}(0), \dots, f^{(Y)}(N_y - 1))^T, \end{aligned}$$

будем называть *суммой рядов*. В матричной записи $F = F^{(X)}(I_{N_y})^T + I_{N_x}(F^{(Y)})^T$, где I_{N_x} и I_{N_y} — векторы, состоящие из единиц.

Предложение 11. Пусть (L_x, L_y) — размеры окна, такие что выполняются $\min(L_x, K_x, L_y, K_y) > 1$, и при этих размерах окна $\text{rank}_{L_x} F^{(X)} = d_x$ и $\text{rank}_{L_y} F^{(Y)} = d_y$. Тогда для суммы рядов $f(i, j) = f^{(X)}(i) + f^{(Y)}(j)$ справедливо неравенство

$$d_x + d_y - 2 \leq \underset{L_x, L_y}{\text{rank}} F \leq d_x + d_y.$$

Доказательство предложения 11. Пусть траекторные матрицы рядов имеют следующие сингулярные разложения:

$$\mathbf{W}^{(X)} = \sum_{m=1}^{d_x} \sqrt{\lambda_m^{(X)}} U_m^{(X)} (V_m^{(X)})^T, \quad \mathbf{W}^{(Y)} = \sum_{n=1}^{d_y} \sqrt{\lambda_n^{(Y)}} U_n^{(Y)} (V_n^{(Y)})^T.$$

Поле F является суммой двух произведений рядов $F^{(1)} = F^{(X)}(I_{N_y})^T$ и $F^{(2)} = I_{N_x}(F^{(Y)})^T$. KP-SVD двумерных траекторных матриц полей $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ по (76) имеет вид:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \sum_{m=1}^{d_x} \sqrt{\lambda_{1,m}} \Phi_{1,m} \otimes \Psi_{1,m}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \sum_{n=1}^{d_y} \sqrt{\lambda_{2,n}} \Phi_{2,n} \otimes \Psi_{2,n},$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1,m} &= \lambda_m^{(X)} L_y K_y, & \lambda_{2,n} &= \lambda_n^{(Y)} L_x K_x, \\ \Psi_{1,m} &= \frac{1}{\sqrt{L_y}} \cdot U_m^{(X)} (I_{L_y})^T, & \Psi_{2,n} &= \frac{1}{\sqrt{L_x}} \cdot I_{L_x} (U_n^{(Y)})^T, \\ \Phi_{1,m} &= \frac{1}{\sqrt{K_y}} \cdot V_m^{(X)} (I_{K_y})^T, & \Phi_{2,n} &= \frac{1}{\sqrt{K_x}} \cdot I_{K_x} (V_n^{(Y)})^T. \end{aligned}$$

Таким образом, двумерная траекторная матрица поля F имеет разложение

$$(77) \quad \mathbf{X} = \sum_{m=1}^{d_x} \sqrt{\lambda_{1,m}} \Phi_{1,m} \otimes \Psi_{1,m} + \sum_{n=1}^{d_y} \sqrt{\lambda_{2,n}} \Phi_{2,n} \otimes \Psi_{2,n},$$

а значит $\text{rank}_{L_x, L_y} F \leq d_x + d_y$.

Докажем, что

$$\dim \text{span} (\Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{1,d_x}, \Psi_{2,1}, \dots, \Psi_{2,d_y}) \geq d_x + d_y - 1.$$

Достаточно рассмотреть два случая:

1. $I_{L_x} \notin \text{span} (\{U_m^{(X)}\}_{m=1}^{d_x})$ или $I_{L_y} \notin \text{span} (\{U_n^{(Y)}\}_{n=1}^{d_y})$.

Пусть, например $I_{L_x} \notin \text{span} (\{U_m^{(X)}\}_{m=1}^{d_x})$. По лемме 9 объединенная система собственных полей $\{\Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{1,d_x}, \Psi_{2,1}, \dots, \Psi_{2,d_y}\}$ линейно независима. Лемму 9 можно применить и для другого варианта, когда $I_{L_y} \notin \text{span} (\{U_n^{(Y)}\}_{n=1}^{d_y})$. Для этого нужно рассматривать систему транспонированных матриц $\{\Psi_{1,1}^T, \dots, \Psi_{1,d_x}^T, \Psi_{2,1}^T, \dots, \Psi_{2,d_y}^T\}$.

2. $I_{L_x} \in \text{span} (\{U_m^{(X)}\}_{m=1}^{d_x})$ и $I_{L_y} \in \text{span} (\{U_n^{(Y)}\}_{n=1}^{d_y})$.

Можно считать, что траекторные матрицы имеют разложение

$$\mathbf{W}^{(X)} = \sum_{m=1}^{d_x} P_m^{(X)} (Q_m^{(X)})^T, \quad \mathbf{W}^{(Y)} = \sum_{n=1}^{d_y} P_n^{(Y)} (Q_n^{(Y)})^T,$$

где системы $\{P_m^{(X)}\}_{m=1}^{d_x}$ и $\{P_n^{(Y)}\}_{n=1}^{d_y}$ — ортогональные, причем

$$P_1^X = I_{L_x}, \quad P_1^Y = I_{L_y},$$

а системы $\{Q_m^{(X)}\}_{m=1}^{d_x}$, $\{Q_n^{(Y)}\}_{n=1}^{d_y}$ — линейно независимы внутри.

Тогда двумерная траекторная матрица имеет разложение

$$\mathbf{X}^{(1)} = \sum_{m=1}^{d_x} \sqrt{\lambda_{1,m}} Q_{1,m} \otimes P_{1,m} + \sum_{n=1}^{d_y} \sqrt{\lambda_{2,n}} Q_{2,n} \otimes P_{2,n},$$

где

$$\begin{aligned} P_{1,m} &= P_m^{(X)} (I_{L_y})^T, & P_{2,n} &= I_{L_x} (P_n^{(Y)})^T \\ Q_{1,m} &= Q_m^{(X)} (I_{K_y})^T, & Q_{2,n} &= I_{K_x} (Q_n^{(Y)})^T. \end{aligned}$$

Заметим, что $P_{1,1} = P_{2,1} = I_{L_x} (I_{L_y})^T$, а система

$$\{I_{L_x} (I_{L_y})^T, P_{1,2}, \dots, P_{1,d_x}, P_{2,2}, \dots, P_{2,d_y}\}$$

линейно независима по лемме 8. Следовательно, выполняется

$$\begin{aligned} \dim \text{span} (\Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{1,d_x}, \Psi_{2,1}, \dots, \Psi_{2,d_y}) &= \\ = \dim \text{span} (P_{1,1}, \dots, P_{1,d_x}, P_{2,1}, \dots, P_{2,d_y}) &= d_x + d_y - 1. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали неравенство

$$\dim \text{span} (\Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{1,d_x}, \Psi_{2,1}, \dots, \Psi_{2,d_y}) \geq d_x + d_y - 1,$$

аналогично можно доказать, что

$$\dim \text{span} (\Phi_{1,1}, \dots, \Phi_{1,d_x}, \Phi_{2,1}, \dots, \Phi_{2,d_y}) \geq d_x + d_y - 1.$$

Из этих условий следует в силу предложения 10, что $\text{rank } F \geq d_x + d_y - 2$.

Замечание 15. Если ряды $F^{(X)}$ и $F^{(Y)}$ отделены от константы окнами L_x и L_y , то $\text{rank } F = d_x + d_y$. Более того, разложение (77) будет являться КР-SVD двумерной траекторной матрицы \mathbf{X} с точностью до переупорядочения слагаемых, т.е. $(\sqrt{\lambda_{1,m}}, \Psi_{1,m}, \Phi_{1,m})$ и $(\sqrt{\lambda_{2,n}}, \Psi_{2,n}, \Phi_{2,n})$ будут всеми ее собственными тройками.

Приведем также примеры всевозможных случаев:

1. $f^{(X)}(i) = \sin(ai + b)$, $f^{(Y)}(j) = \sin(cj + d)$

Эти ряды имеют ранг 2, причем их траекторные пространства при длине окна больше 2 не содержат единичный вектор. Значит ранг их суммы равен 4.

2. $f^{(X)}(i) = \sin(ai + b) + f$, $f^{(Y)}(j) = \sin(cj + d) + h$

Ранг обоих рядов равен 3, а ранг суммы равен 5, если $f + h \neq 0$.

3. $f^{(X)}(i) = ai + b$, $f^{(Y)}(j) = cj + d$

Ранг рядов равен 2, а их сумма будет линейной функцией, для которой в следующем подразделе будет доказано, что ее ранг тоже равен 2.

3.5.5. Полиномы. Для полиномов верно утверждение о ранге из раздела 2.4.3. Пусть полином степени m задан следующей формулой:

$$P_m(i, j) = \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n a_{nk} i^k j^{n-k},$$

где не все a_{mk} , $k = 0, \dots, m$, равны 0, и для размеров поля выполняются неравенства $N_x, N_y > 2(m+1)$. Если выбрать $L_x, L_y \geq m+1$, то ранг поля для полинома $P_m(i, j)$ такой же, как и в утверждении 2. В частности, для ранга d выполняется неравенство

$$m+1 \leq d \leq \begin{cases} (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1) (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1), & \text{для четных } m, \\ (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1) (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2), & \text{для нечетных } m. \end{cases}$$

Действительно, двумерная траекторная матрица для полинома $P_m(i, j)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^m \sum_{l=0}^h c_{nhkl} \mathbf{Q}_{h,l} \otimes \mathbf{P}_{n,k}, \quad \text{где} \\ \mathbf{P}_{n,k} &= ((1^k, 2^k, \dots, L_x^k)^T (1^{n-k}, 2^{n-k}, \dots, L_y^{n-k})), \\ \mathbf{Q}_{h,l} &= ((1^l, 2^l, \dots, K_x^l)^T (1^{h-l}, 2^{h-l}, \dots, K_y^{h-l})), \end{aligned}$$

а коэффициенты c_{nhkl} имеют такой же вид, как и в утверждении 2.

Системы $\{P_{n,k}\}$ и $\{Q_{h,l}\}$ будут внутри линейно независимы при

$$m + 1 \leq \min(L_x, K_x, L_y, K_y),$$

а значит ранг поля будет равен рангу матрицы \mathbf{C} , описанной в (36), причем матрица \mathbf{C} зависит только от коэффициентов полинома и не зависит от размеров окна.

Замечание 16. При достаточных размерах поля можно найти такие L_{x0} и L_{y0} , что для полиномов выполняется определение 15, т.е. полиномы являются полями конечного ранга.

Следствие 3. Линейное поле $f(i, j) = ai + bj + c$, где $ab \neq 0$, является полем конечного ранга и его ранг равен двум.

3.5.6. Тригонометрические функции. Рассмотрим сумму гармоник

$$\begin{aligned} h_d(k, l) &= \sum_{m=1}^d \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_m^{(X)} k) \\ \sin(2\pi\omega_m^{(X)} k) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_m^{(Y)} l) \\ \sin(2\pi\omega_m^{(Y)} l) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{m=1}^d \left(a_m \cos(2\pi\omega_m^{(X)} k) \cos(2\pi\omega_m^{(Y)} l) + \right. \\ &\quad \left. + b_m \cos(2\pi\omega_m^{(X)} k) \sin(2\pi\omega_m^{(Y)} l) + \right. \\ &\quad \left. + c_m \sin(2\pi\omega_m^{(X)} k) \cos(2\pi\omega_m^{(Y)} l) + \right. \\ &\quad \left. + d_m \sin(2\pi\omega_m^{(X)} k) \sin(2\pi\omega_m^{(Y)} l) \right), \end{aligned} \quad (78)$$

где $1 \leq k \leq N_x$ и $1 \leq l \leq N_y$, а также выполняются условия

$$\begin{aligned} (\omega_n^{(X)}, \omega_n^{(Y)}) &\neq (\omega_m^{(X)}, \omega_m^{(Y)}), \quad \text{для } n \neq m, \\ \omega_m^{(X)}, \omega_m^{(Y)} &\in (0; 1/2), \end{aligned} \quad (79)$$

Предложение 12. При достаточных размерах N_x и N_y поле $h_d(k, l)$ является полем конечного ранга, и ранг его равен

$$\text{rank } h_d = 2 \cdot \sum_{m=1}^d \text{rank} \begin{pmatrix} a_m & b_m & c_m & d_m \\ d_m & -c_m & -b_m & a_m \end{pmatrix}.$$

Доказательство предложения 12. Запишем слагаемые суммы (78) через комплексные экспоненты:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_m^{(X)} k) & \sin(2\pi\omega_m^{(X)} k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_m^{(Y)} l) \\ \sin(2\pi\omega_m^{(Y)} l) \end{pmatrix} = \\ &= E_{xm}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} E_{ym} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot E_{xm}^T \begin{pmatrix} a_m - d_m - i(c_m + b_m) & a_m + d_m - i(c_m - b_m) \\ a_m + d_m + i(c_m - b_m) & a_m - d_m + i(c_m + b_m) \end{pmatrix} E_{ym}, \end{aligned}$$

где

$$E_{xm} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \omega_m^{(X)} k} \\ e^{-2\pi i \omega_m^{(X)} k} \end{pmatrix}, \quad E_{ym} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \omega_m^{(Y)} l} \\ e^{-2\pi i \omega_m^{(Y)} l} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждое слагаемое суммы (78) раскладывается в сумму четырех произведений комплексных экспонент с разными частотами:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(2\pi \omega_m^{(X)} k) & \sin(2\pi \omega_m^{(X)} k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi \omega_m^{(Y)} l) \\ \sin(2\pi \omega_m^{(Y)} l) \end{pmatrix} = \\ & = (a_m - d_m - i(c_m + b_m)) e^{2\pi i \omega_m^{(X)} k} e^{2\pi i \omega_m^{(Y)} l} + \\ & + (a_m + d_m - i(c_m - b_m)) e^{2\pi i \omega_m^{(X)} k} e^{-2\pi i \omega_m^{(Y)} l} + \\ & + (a_m + d_m + i(c_m - b_m)) e^{-2\pi i \omega_m^{(X)} k} e^{2\pi i \omega_m^{(Y)} l} + \\ & + (a_m - d_m + i(c_m + b_m)) e^{-2\pi i \omega_m^{(X)} k} e^{-2\pi i \omega_m^{(Y)} l}. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты при комплексных экспонентах $e^{2\pi i \omega_m^{(X)} k} e^{2\pi i \omega_m^{(Y)} l}$ и $e^{-2\pi i \omega_m^{(X)} k} e^{-2\pi i \omega_m^{(Y)} l}$ обращаются в ноль одновременно при выполнении условий

$$a_m = d_m \text{ и } b_m = -c_m.$$

Коэффициенты при двух других комплексных экспонентах также обращаются в ноль одновременно, при выполнении условий

$$a_m = -d_m \text{ и } b_m = c_m.$$

Таким образом, количество ненулевых коэффициентов в каждом слагаемом суммы (78) равно

$$2 \cdot \text{rank} \begin{pmatrix} a_m & b_m & c_m & d_m \\ d_m & -c_m & -b_m & a_m \end{pmatrix}.$$

Итак, поле h_d представимо в виде суммы произведений

$$(80) \quad h_d(k, l) = \sum_{n=1}^r x_n y_n^k z_n^l, \\ r = 2 \cdot \sum_{m=1}^d \text{rank} \begin{pmatrix} a_k & b_k & c_k & d_k \\ d_k & -c_k & -b_k & a_k \end{pmatrix},$$

где все коэффициенты $x_n \in \mathbb{C}$ не равны нулю, а y_n и z_n имеют вид $y_n = e^{2\pi i \omega_{1n}}$, $z_n = e^{2\pi i \omega_{2n}}$, причем пары (y_n, z_n) различны в силу условий (79), т.е. $(y_n, z_n) \neq (y_m, z_m)$ для различных $n \neq m$.

В работе [3] показано, что ранг блочно-ганкелевой матрицы \mathbf{W} , построенной для поля вида (80) при различных парах (y_n, z_n) , равен r в определенной области значений размеров окна (L_x, L_y) . Эта область такова, что по ней можно найти (L_{x0}, L_{y0}) , входящие в определение поля конечного ранга.

Замечание 17. *Класс полей конечного ранга замкнут относительно операций сложения и умножения. Всевозможные суммы произведений гармоник, полиномов и экспонент являются полями конечного ранга.*

3.5.7. Поля неполного ранга. Довольно важным является класс полей, имеющих неполный ранг, т.е. когда траекторное пространство $\mathcal{L}^{(L_x, L_y)}$ (70) не совпадает с \mathcal{M}_{L_x, L_y} . Например, неполный ранг поля является очевидным необходимым условием для отделимости поля от другого. В одномерном случае также можно ввести аналогичное понятие, но для него доказано (см. Приложение), что класс рядов неполного ранга совпадает с классом рядов конечного ранга.

Введем понятие поля неполного ранга в случае меняющейся длины окна.

Определение 18. Будем говорить, что поле F — *неполного ранга*, если существуют такие L_{x0} и L_{y0} , что

$$\begin{aligned} 1 &\leq L_{x0} < \lfloor N_x/2 \rfloor, \\ 1 &\leq L_{y0} < \lfloor N_y/2 \rfloor, \end{aligned}$$

и для любых L_x, L_y , для которых выполняется

$$L_{x0} \leq \min(L_x, K_x), \quad L_{y0} \leq \min(L_y, K_y),$$

имеет место неравенство $\text{rank}_{L_x, L_y} F < \min(L, K)$.

Заметим, что поля конечного ранга являются полями неполного ранга. Однако, поля неполного ранга не всегда имеют конечный ранг.

Пример 2 (Поле неполного ранга, но не конечного ранга). Поле F , где $f(i, j) = \sin i \cdot \ln(j + 1)$, для любых размеров окна (L_x, L_y) , таких что $2 \leq \min(L_x, K_x) \leq \lfloor N_x/2 \rfloor$, $1 \leq \min(L_y, K_y) \leq \lfloor N_y/2 \rfloor$, будет иметь ранг $2 \cdot \min(L_y, K_y)$.

Также пример 1 является примером поля, отделимого от константы и не являющегося полем конечного ранга.

4. Моделирование

4.1. Описание методов, постановка задачи

В данной разделе проводится сравнительный анализ качества очистки двумерных дискретных полей от шума методом 2D-SSA с различными параметрами, а также другими методами, основанными на сингулярном разложении: SVD и MSSA, которые в силу своей конструкции можно рассматривать как частные (в некотором смысле, вырожденные) случаи 2D-SSA.

В этом разделе будем называть SVD непосредственное сингулярное разложение матрицы F , без каких-либо ее преобразований:

$$(81) \quad F = \sum_{k=1}^d F_k = \sum_{k=1}^d \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T,$$

где d — ранг матрицы F , а $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d > 0$ — все ненулевые собственные числа матрицы FF^T , т.е. SVD-ранг поля (количество слагаемых в сумме (81)) равен рангу матрицы F . Если элементы поля $f(i, j)$ представимы в виде

суммы r разделяемых по переменным функций, т.е. $f(i, j) = \sum_{k=1}^r p_k(i) \cdot q_k(j)$, то SVD-ранг поля F не превосходит r , и будет равен r , если системы $\{p_k\}_{k=1}^r$ и $\{q_k\}_{k=1}^r$ внутри линейно независимы. SVD можно рассматривать как 2D-SSA с размерами окна $(N_x, 1)$ или $(1, N_y)$, в этом случае матрица \mathbf{W} (61) совпадает с матрицей F с точностью до транспонирования.

Метод MSSA, или «Гусеница» для многомерных рядов, описан в [9]. Этот метод имеет параметр L (длина окна), аналогично SVD и 2D-SSA он основан на разложении траекторной матрицы. Траекторная матрица MSSA для многомерного ряда $(F^{(1)}, \dots, F^{(s)})$ строится следующим образом: $\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)} : \dots : \mathbf{X}^{(s)}]$, где $\mathbf{X}^{(i)}$ — траекторные матрицы для одномерных рядов $F^{(i)}$. MSSA-ранг поля F — это количество слагаемых в сингулярном разложении траекторной матрицы MSSA.

Однако, MSSA можно применить к двумерному полю F двумя способами: если рассматривать поле как многомерный ряд по i

$$(82) \quad F^{(X,j)} = f(\cdot, j-1) = (f(0, j-1), \dots, f(N_x-1, j-1))^T,$$

где $1 \leq j \leq N_y$, или как многомерный ряд по j

$$(83) \quad F^{(Y,i)} = f(i-1, \cdot) = (f(i-1, 0), \dots, f(i-1, N_y-1))^T,$$

где $1 \leq i \leq N_x$.

Будем называть вариант (82) *MSSA-X*, а вариант (83) — *MSSA-Y*. *MSSA-X* будет соответствовать 2D-SSA с размерами окна $(L, 1)$ (где $1 < L < N_x$), а *MSSA-Y* — с размерами $(1, L)$ (где $1 < L < N_y$).

Задача ставится так: сравнить качество восстановления по первым r компонентам зашумленных двумерных полей для методов SVD, MSSA, 2D-SSA. Сравнение производится на примерах полей конечного ранга, неполного ранга и произвольных изображений, при оптимальном или фиксированном выборе параметров методов и числа компонент для восстановления. Также ставится задача сравнить методы SVD и 2D-SSA с теми размерами окна, при которых метод будет сравним по трудоемкости с SVD (т.е. в обоих методах собственные числа и вектора будут вычисляться для матрицы примерно одинакового размера).

4.2. Модель шума, критерии качества

Пусть имеется поле

$$F = \begin{pmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0, N_y-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1, N_y-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N_x-1,0) & f(N_x-1,1) & \dots & f(N_x-1, N_y-1) \end{pmatrix}.$$

Мы наблюдаем зашумленное поле $F' = F + \Xi$, где

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_{0,0} & \xi_{0,1} & \dots & \xi_{0, N_y-1} \\ \xi_{1,0} & \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1, N_y-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{N_x-1,0} & \xi_{N_x-1,1} & \dots & \xi_{N_x-1, N_y-1} \end{pmatrix}.$$

Далее, с помощью одного из методов производится разложение поля на элементарные восстановленные компоненты (d для разных методов, вообще говоря, разное):

$$\mathbf{F}' = \sum_{i=1}^d \mathbf{F}'_i,$$

и в качестве восстановленного изображения выбирается сумма первых r , $r \leq d$, компонент разложения:

$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^r \mathbf{F}'_i.$$

Для измерения отклонения зашумленных и восстановленных полей от исходного используется квадратичная метрика, иными словами, нормированная метрика в пространстве \mathcal{M}_{N_x, N_y} (43). Квадрат расстояния между полями определяется как

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\text{ms}}^2(\mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i,j=0}^{N_x-1, N_y-1} (f^{(1)}(i, j) - f^{(2)}(i, j))^2 = \\ &= \frac{1}{N_x N_y} \text{dist}_{\mathcal{M}}^2(\mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}) = \frac{1}{N_x N_y} \|\mathbf{F}^{(1)} - \mathbf{F}^{(2)}\|_{\mathcal{M}}^2, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ — норма Фробениуса (42).

Зашумленность поля измеряется характеристикой SNR (*Signal to Noise Ratio*):

$$\text{SNR} = \frac{\text{dist}_{\text{ms}}^2(\mathbf{F}, \mathbf{0})}{\mathbb{E} \text{dist}_{\text{ms}}^2(\mathbf{F}', \mathbf{F})} = \frac{\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{M}}^2}{\mathbb{E} \|\Xi\|_{\mathcal{M}}^2}.$$

Сравнение производится методом статистического моделирования. В качестве модели шума используется, в основном, модель белого гауссовского шума, в которой $\xi_{i,j} \in N(0, \sigma^2)$ — независимые случайные величины.

Моделируется выборка $\mathbf{F}' = (\mathbf{F}'^{(1)}, \dots, \mathbf{F}'^{(n)})$ зашумленных полей. При заданных параметрах (метод, количество компонент), в результате восстановления получается выборка $\mathbf{F}_R = (\mathbf{F}_R^{(1)}, \dots, \mathbf{F}_R^{(n)})$ восстановленных полей.

В качестве оценок качества восстановления поля (в среднем) выбраны следующие величины:

$$\begin{aligned} \text{SQ_BIAS} &= \text{dist}_{\text{ms}}^2(\bar{\mathbf{F}}_R, \mathbf{F}) \quad (\text{квадрат смещения}), \\ \text{VAR} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{dist}_{\text{ms}}^2(\mathbf{F}_R^{(k)}, \bar{\mathbf{F}}_R) \quad (\text{средняя дисперсия}), \\ \text{MSE} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{dist}_{\text{ms}}^2(\mathbf{F}_R^{(k)}, \mathbf{F}) \quad (\text{ср. квадрат отклонения}), \\ \text{где } \bar{\mathbf{F}}_R &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_R^{(k)} \quad - \text{выборочное среднее.} \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $\text{MSE} = \text{VAR} + \text{SQ_BIAS}$.

Также, для сравнения качества восстановления отдельных элементов поля, можно рассмотреть выборки $\mathbf{f}_R(i, j) = (f_R^{(1)}(i, j), \dots, f_R^{(n)}(i, j))$ для каждого элемента поля и соответствующие оценки:

$$\begin{aligned} \text{SQ_BIAS}_{i,j} &= \left(\overline{\mathbf{f}_R(i, j)} - f(i, j) \right)^2, \\ \text{VAR}_{i,j} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(f_R^{(k)}(i, j) - \overline{\mathbf{f}_R(i, j)} \right)^2, \\ \text{MSE}_{i,j} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(f_R^{(k)}(i, j) - f(i, j) \right)^2, \\ \text{где } \overline{\mathbf{f}_R(i, j)} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_R^{(k)}(i, j). \end{aligned}$$

Заметим, что введенные ранее оценки SQ_BIAS, VAR, MSE получаются из оценок для отдельных элементов поля усреднением:

$$\begin{aligned} \text{SQ_BIAS} &= \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i,j=0}^{N_x-1, N_y-1} \text{SQ_BIAS}_{i,j}, \\ \text{VAR} &= \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i,j=0}^{N_x-1, N_y-1} \text{VAR}_{i,j}, \\ \text{MSE} &= \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i,j=0}^{N_x-1, N_y-1} \text{MSE}_{i,j}. \end{aligned}$$

Распределение SQ_BIAS, VAR, MSE можно хорошо аппроксимировать нормальным и построить соответствующие выборочные доверительные интервалы.

Таким же образом можно строить оценки качества восстановления (и соответствующие доверительные интервалы) для областей $I \subseteq \{0, \dots, N_x - 1\} \times \{0, \dots, N_y - 1\}$:

$$\begin{aligned} \text{SQ_BIAS}_I &= \frac{1}{|I|} \sum_{(i,j) \in I} \text{SQ_BIAS}_{i,j}, \\ \text{VAR}_I &= \frac{1}{|I|} \sum_{(i,j) \in I} \text{VAR}_{i,j}, \\ \text{MSE}_I &= \frac{1}{|I|} \sum_{(i,j) \in I} \text{MSE}_{i,j}. \end{aligned}$$

4.3. Поля конечного ранга, оптимальное количество компонент

В ходе эксперимента рассматривались различные поля конечного ранга. В начале исследовался вопрос оптимального количества компонент, т.е. того количества компонент, при котором достигается наилучшее отделение от шума

в смысле среднеквадратичного отклонения (MSE). Прежде всего, по аналогии с одномерным SSA, будем предполагать, что для методов имеет место приближенная отделимость сигнала от шума, т.е. набор собственных троек приближенно разделяется на два набора, соответствующих сигналу и шуму, причем набор собственных троек, соответствующих сигналу, будет примерно одинаковым для зашумленного и незашумленного полей. А значит, если все собственные числа, соответствующие шуму, меньше собственных чисел, соответствующих сигналу (это соотношение достигается при уровнях шума меньше определенного порога), то при выборе первых r компонент данные методы будут приближенно отделять сигнал от шума; кроме того, оптимальное количество компонент должно быть равно рангу незашумленного поля. Эти предположения подтверждаются результатами эксперимента.

Рассматривались два тестовых поля $sin12_sin6$ и $sin12_sin6_rot$, см. формулы в таблице 1.

Таблица 1. Произведение синусов, формулы

поле	$f(i, j)$
$sin12_sin6$	$\sin\left(\frac{\pi i}{6} + 0.5\right) \sin\left(\frac{\pi j}{3} + 0.3\right)$
$sin12_sin6_rot$	$\sin\left(\frac{\pi(i-j)}{6\sqrt{2}} + 0.5\right) \sin\left(\frac{\pi(i+j)}{3\sqrt{2}} + 0.3\right)$

Заметим, что поле $sin12_sin6_rot$ формально получается из другого поля ($sin12_sin6$) поворотом на $\pi/4$ в плоскости O_{ij} .

Оба поля имеют размеры 24×24 . В таблице 2 приведены ранги полей (количество элементов в разложении незашумленных полей) для всех методов и рассматриваемых полей.

Таблица 2. Произведение синусов, ранги

поле	ранг			
	SVD	MSSA-X	MSSA-Y	2D-SSA
$sin12_sin6$	1	2	2	4
$sin12_sin6_rot$	4	4	4	4

К полям добавлялся гауссовский шум с различным уровнем ($SNR = 2.77, 1, 0.39, 0.25$) и производилось восстановление методами SVD, MSSA-X, 2D-SSA (с двумя наборами параметров), для разных r от 1 до 10. Размер выборки полей выбирался таким образом, чтобы по доверительным интервалам можно было достаточно точно определить минимум отклонения.

Случай MSSA-Y принципиально от MSSA-X не отличается в данных примерах, поэтому он не рассматривался.

Был замечен следующий эффект: в тех тестовых примерах, в которых минимум по VAR и SQ_BIAS достигается на одинаковом количестве компонент, оптимальное количество компонент равно рангу поля. В тех примерах, где минимумы не совпадают, равенство не достигается. Будем называть совпадение минимума по VAR и SQ_BIAS «правильной» приближенной разделимостью, а равенство ранга оптимальному количеству компонент — признаком такой разделимости. Далее подробно описывается, при каких уровнях шума наблюдается это признак.

Для MSSA признак наблюдается в небольшом количестве примеров. Для 2D-SSA с размерами окна $(N_x/2, N_y/2) = (12, 12)$ признак приближенной разделимости наблюдается во всех тестовых примерах. Это можно объяснить тем, что выбранные размеры окна согласованы с периодами синусов. При других размерах окна $(5, 5)$ признак наблюдался в заметно меньшем количестве примеров.

Для SVD в примере *sin12_sin6* также наблюдается признак «правильной» приближенной разделимости для всех тестовых полей. Однако, это можно объяснить тем, что ранг поля в этом примере равен 1, т.е. улучшить отделимость за счет выбора меньшего количества компонент нельзя. Это подтверждается и тестовым примером *sin12_sin6_rot*, у которого ранг равен 4 для всех методов, признак «правильной» разделимости для SVD наблюдается лишь при $\text{SNR} = 2.77, 1$.

Также для примера *sin12_sin6_rot* при уровне шума $\text{SNR} = 2.77$ была исследована зависимость качества восстановления для разных L_x и L_y .

Качество восстановления оказывается лучше для больших $L_x \cdot L_y$. Поэтому для лучшего отделения полей конечного ранга от шума стоит брать размеры окна равные половинам размеров поля.

4.4. Поля конечного ранга, сравнение методов

На основе результатов предыдущего эксперимента, сравнивалось качество восстановления для разных методов при количестве компонент, равном рангу. В качестве тестовых примеров рассматривались различные поля конечного ранга — произведения различных одномерных рядов конечного ранга, и они же (возможно, с точностью до незначительного растяжения/сдвига), повернутые на $\pi/4$. Все поля размера 24×24 .

В таблице 3 приведены формулы полей, которые рассматривались помимо тестовых примеров *sin12_sin6* и *sin12_sin6_rot*.

Сравнивались методы:

- SVD — размеры окна $(N_x, 1) = (24, 1)$,
- MSSA-X — размеры окна $(N_x/2, 1) = (12, 1)$,
- MSSA-Y — размеры окна $(1, N_y/2) = (1, 12)$. Этот метод не рассматривался только если поле симметрично в смысле ранга (ранг для MSSA-X равен рангу для MSSA-Y),

Таблица 3. Поля конечного ранга, формулы

поле	$f(i, j)$
lin_sin	$(0.1i - 1.14) \sin\left(\frac{\pi j}{6}\right)$
lin_sin_rot	$\left(0.1 \frac{i-j}{\sqrt{2}} - 1.14\right) \sin\left(\frac{\pi(i+j)}{6\sqrt{2}}\right)$
sin_prod_sum	$\sin\left(\frac{\pi i}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi j}{6}\right) + 0.5 \cdot \sin\left(\frac{\pi i}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi j}{3}\right)$
exp	$\exp(0.04i + 0.03j)$
lin_lin	$(0.1i - 1.14)(0.1j - 1.13)$
lin_lin_rot	$(0.05(i+j) - 0.84)(i-j) \cdot 0.1$
sin_exp	$\sin\left(\frac{\pi i}{6} + 0.5\right) \exp(0.05j)$
sin_exp_rot	$\sin\left(\frac{\pi(i+j)}{6\sqrt{2}} + 0.5\right) \exp\left(\frac{0.05(i-j)}{\sqrt{2}}\right)$
lin_exp	$(0.1i - 1.14) \exp(0.05j)$

- 2D-SSA в случае наилучшего восстановления, с половинными размерами окна, т.е. $(N_x/2, N_y/2) = (12, 12)$,
- 2D-SSA, сравнимый по трудоемкости с SVD — размеры окна $(L_0, L_0) = (5, 5)$, где $L_0 = \lceil \sqrt{N_x} \rceil$.

Уровень шума выбирался не слишком большим (SNR примерно равно 3), чтобы все методы демонстрировали «правильную» приближенную отделимость от шума. Поля восстанавливались по количеству компонент, равному рангу поля (ранги приведены в таблице 4).

Основные результаты.

1. Для всех тестовых примеров наилучшее восстановление достигается для 2D-SSA с половинными размерами окна $(N_x/2, N_y/2)$ (таблицы 5–7). Также для всех тестовых примеров имеет место следующая упорядоченность по убыванию качества восстановления:
2D-SSA $(N_x/2, N_y/2)$ — 2D-SSA (L_0, L_0) — MSSA.
2. Для полей, у которых ранг для SVD существенно меньше, чем для 2D-SSA, SVD оказывается лучше, чем 2D-SSA (L_0, L_0) и MSSA (таблица 5). В то же время, для полей с одинаковым рангом во всех методах SVD оказывается хуже остальных методов, причем эти поля — в основном, поля из первой группы, повернутые на $\pi/4$. Это показывает устойчивость 2D-SSA к повороту, в отличие от SVD (см. таблицу 6).

Таблица 4. Поля конечного ранга, ранги

поле	ранг			
	SVD	MSSA-X	MSSA-Y	2D-SSA
<i>lin_sin</i>	1	2	2	4
<i>lin_sin_rot</i>	4	4	4	4
<i>sum_prod_sin</i>	2	4	4	8
<i>exp</i>	1	1	1	1
<i>lin_lin</i>	1	2	2	4
<i>lin_lin_rot</i>	2	3	3	4
<i>sin_exp</i>	1	2	1	2
<i>sin_exp_rot</i>	2	2	2	2
<i>lin_exp</i>	1	2	1	2

Таблица 5. Поля с маленьким SVD-рангом, MSE

поле	MSE				
	SVD (24,1)	MSSA-		2D-SSA	
		X (12,1)	Y (1,12)	(5,5)	(12,12)
<i>sum_prod_sin</i>	0.0150	-	0.0269	0.0208	0.0069
<i>sin12_sin6</i>	0.0075	-	0.0127	0.0093	0.0034
<i>lin_sin</i>	0.0071	-	0.0128	0.0094	0.0034
<i>lin_lin</i>	0.0060	-	0.0112	0.0076	0.0028

Таблица 6. Поля с одинаковым рангом, MSE

поле	MSE				
	SVD (24,1)	MSSA-		2D-SSA	
		X (12,1)	Y (1,12)	(5,5)	(12,12)
<i>sin12_sin6_rot</i>	0.0290	-	0.0242	0.0091	0.0035
<i>lin_sin_rot</i>	0.0074	-	0.0073	0.0024	0.0009
<i>sin_exp_rot</i>	0.1600	-	0.1411	0.0504	0.0206
<i>exp</i>	0.1872	-	0.1601	0.0505	0.0224

3. В примерах, где ранг полей не сильно различается для разных методов, SVD также оказывается хуже, чем аналогичный ему по трудоемкости 2D-SSA (L_0, L_0), но SVD остается немного лучше, чем MSSA-X (см. таб-

лицу 7).

Таблица 7. Поля с близкими рангами, MSE

поле	MSE				
	SVD (24,1)	MSSA-		2D-SSA	
		X (12,1)	Y (1,12)	(5,5)	(12,12)
<i>sin_exp</i>	0.0529	0.0921	0.0471	0.0346	0.0145
<i>lin_exp</i>	0.0569	0.1056	0.0481	0.0339	0.0136
<i>lin_lin_rot</i>	0.0106	-	0.0151	0.0071	0.0027

4.5. Поля конечного ранга, различные области

Для тестовых примеров рядов конечного ранга также проводилось сравнение качества восстановления для различных областей поля: центральной (*center*, $(i, j) \in I_c$), средней (*middle*, $(i, j) \in I_m$) и крайней (*edges*, $(i, j) \in I_e$):

$$I_c = \left(\frac{N_x}{2} - \frac{N_x}{6}, \frac{N_x}{2} + \frac{N_x}{6} \right) \times \left(\frac{N_y}{2} - \frac{N_y}{6}, \frac{N_y}{2} + \frac{N_y}{6} \right),$$

$$I_m = \left(\frac{N_x}{2} - \frac{N_x}{3}, \frac{N_x}{2} + \frac{N_x}{3} \right) \times \left(\frac{N_y}{2} - \frac{N_y}{3}, \frac{N_y}{2} + \frac{N_y}{3} \right) \setminus I_c,$$

$$I_e = (0, N_x) \times (0, N_y) \setminus (I_c \cup I_m).$$

Было установлено, что если MSE по всему полю больше для одного метода по отношению к другому, то и MSE для отдельных областей в основном упорядочены так же. Иными словами, достигается равномерная упорядоченность методов по ошибке для разных областей.

На примере «стационарных» полей было получено, что для методов ошибка восстановления имеет разное распределение по элементам поля: для SVD ошибка распределена по полю равномерно, в то время как у 2D-SSA с половинными размерами окна ошибка увеличивается от центра к краям (см. таблицу 8).

Таблица 8. Различные области, MSE

поле	SVD MSE			2D-SSA MSE		
	center	middle	edges	center	middle	edges
<i>sin12_sin6</i>	0.0077	0.0073	0.0077	0.0016	0.0027	0.0042
<i>sin12_sin6_rot</i>	0.0286	0.0299	0.0285	0.0016	0.0027	0.0044
<i>lin_sin</i>	0.0040	0.0055	0.0087	0.0013	0.0020	0.0047
<i>lin_sin_rot</i>	0.0043	0.0066	0.0085	0.0005	0.0006	0.0012
<i>sum_prod_sin</i>	0.0155	0.0145	0.0152	0.0033	0.0056	0.0085

4.6. Поля неполного ранга

Также было проведено сравнение методов для полей неполного ранга, определенных в разделе 3.5.7..

Сравнивались те же методы. Рассматривалось два тестовых примера: произведение ряда бесконечного ранга $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ на ряд из синусов, и это же поле, повернутое на $\pi/4$, оба поля 24×24 , формулы приведены в таблице 9.

Таблица 9. Поля неполного ранга, формулы

поле	$f(i, j)$
inf_sin	$\text{sign}(i - 12 + 0.5) \sin\left(\frac{\pi j}{4}\right)$
inf_sin_rot	$\text{sign}(i + j - 24 + 0.5) \sin\left(\frac{\pi(i - j + 3)}{3}\right)$

Для поля inf_sin (L_x, L_y) -ранг равен $\min(L_x, K_x) \cdot \min(2, L_y, K_y)$, т.е. увеличивается только при изменении L_x . Можно показать, что для поля inf_sin_rot (L_x, L_y) -ранг равен $2 \cdot (\min(L_x + L_y, K_x + K_y) - 2)$ (для $K_x, K_y, L_x, L_y > 2$). Ранги для рассмотренных методов приведены в таблице 10.

Таблица 10. Поля неполного ранга, ранги

поле	ранг				
	SVD (24,1)	MSSA-		2D-SSA	
		X (12,1)	Y (1,12)	(5,5)	(12,12)
inf_sin	1	12	2	10	24
inf_sin_rot	24	12	12	16	44

Поля восстанавливались для каждого из методов по оптимальному количеству компонент. Результаты содержатся в таблице 11.

Таблица 11. Поля неполного ранга, MSE

поле	MSE				
	SVD (24,1)	MSSA-		2D-SSA	
		X (12,1)	Y (1,12)	(5,5)	(12,12)
inf_sin	0.0131	0.0729	0.0228	0.0315	0.0394
inf_sin_rot	0.1243	0.0814	-	0.0406	0.0440

Для поля inf_sin , как и ожидалось, лучшие результаты дает SVD (так как SVD хорошо отделяет поля ранга 1, т.е. представляемые в виде $p(i) \cdot q(j)$). Следующий по качеству — MSSA-Y (в случае, когда поле рассматривается как многомерный ряд по j). Это тоже объяснимо, так как ряды $f(i, \cdot)$ являются рядами конечного ранга одинаковой структуры (синусами с одинаковой частотой и различными фазами). Из этого можно сделать вывод, что для полей, у которых неравноправны координаты (по одной координате ряды имеют конечный ранг, а по другой — бесконечный), лучше применять MSSA, т.е. рассматривать поле как набор рядов конечного ранга. В случае inf_sin_rot , напротив, поле нельзя представить в виде $p(i) \cdot q(j)$, и здесь SVD дает худшее качество, а случаи MSSA-X и MSSA-Y не различаются и тоже дают плохое качество.

Причем SVD оказывается хуже 2D-SSA, даже если восстанавливать не по оптимальному количеству компонент, а по рангу незашумленного поля. Заметим также, что 2D-SSA с размерами окна (5, 5) дает лучшее восстановление, чем с размерами (12, 12).

4.7. Произвольные изображения

Также проводилось сравнение качества восстановления для произвольных изображений на примере *lena* (девушка в шляпке, 128×128).

Сравнивались 2D-SSA (10, 10) и SVD, для разных уровней шума и двух типов шума: гауссовский (описан ранее) и *salt and pepper* (модель шума в цифровых фотокамерах). Изображение и примеры шума можно найти на рис. 3



Рис. 3. Тестовый пример: девушка в шляпке

Рассмотрим более подробно модель шума *salt and pepper*. У нее есть четыре параметра: $\rho, p \in [0, 1]$ и $b, w \in \mathbb{R}$. Пусть есть поле F размера $N_x \times N_y$. Равномерно выбирается $\rho N_x N_y$ случайных элементов поля, т.е. случайное подмножество индексов $I \subseteq \{0, \dots, N_x - 1\} \times \{0, \dots, N_y - 1\}$, такое что $|I| = \lfloor \rho N_x N_y \rfloor$. Зашумленное поле F' строится так:

$$f'(i, j) = \begin{cases} \alpha_{i,j}, & \text{для } (i, j) \in I, \\ f(i, j), & \text{для } (i, j) \notin I, \end{cases}$$

где $\alpha_{i,j}$ — независимые случайные величины, имеющие распределение Бер-

нули

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} b & \text{с вероятностью } 1 - p, \\ w & \text{с вероятностью } p. \end{cases}$$

Параметры b и w — «черные» и «белые» значения. В обработке изображений принято брать $b = 0$ и $w = 255$ (максимальная градация цвета). В работе исследовался *salt and pepper* шум с $p = 0.5$.

Было установлено (см. таблицу 12), что для разных уровней и типов шума методы SVD и 2D-SSA имеют примерно одинаковое оптимальное количество компонент, однако качество восстановления у 2D-SSA лучше, при примерно одинаковой трудоемкости.

Таблица 12. Произвольное изображение, девушка в шляпке

шум	SNR	SVD (128,1)		2D-SSA (10,10)	
		комп.	MSE	комп.	MSE
Gaussian, $\sigma = 32$	17.76	17	520.55	16	244.69
Gaussian, $\sigma = 64$	4.44	8	1160.46	7	460.35
Gaussian, $\sigma = 100$	1.81	4	1959.34	4	686.67
Salt & pepper, $\rho = 0.05$	18.30	16	533.84	16	248.94
Salt & pepper, $\rho = 0.2$	4.58	8	1202.72	8	562.10
Salt & pepper, $\rho = 0.5$	1.83	3	2254.45	5	1147.65

5. Примеры анализа полей

5.1. Модельный пример

В качестве модельного примера рассмотрим поле 48×48 (см. рис. 4), заданное формулой

$$(84) \quad \begin{aligned} f(i, j) = & \sin\left(\frac{2\pi}{12}i\right) \sin\left(\frac{2\pi}{12}j\right) + \\ & + 0.6 \sin\left(\frac{2\pi}{6}i\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}j\right) + \\ & + 0.4 \sin\left(\frac{2\pi}{4}i + \frac{2\pi}{8}j\right). \end{aligned}$$

Это поле будет полем конечного ранга (см. раздел 3.5.). Оно является

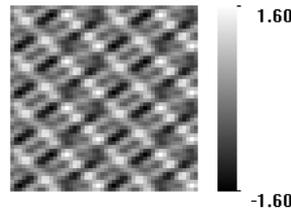


Рис. 4. Ex1: модельный пример (84)

суммой трех тригонометрических полей:

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(i, j) &= \sin\left(\frac{2\pi}{12}i\right) \sin\left(\frac{2\pi}{12}j\right), \\
 f^{(2)}(i, j) &= 0.6 \sin\left(\frac{2\pi}{6}i\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}j\right), \\
 f^{(3)}(i, j) &= 0.4 \sin\left(\frac{2\pi}{4}i + \frac{2\pi}{8}j\right) = \\
 &= 0.4 \left(\sin\left(\frac{2\pi}{4}i\right) \cos\left(\frac{2\pi}{8}j\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{4}i\right) \sin\left(\frac{2\pi}{8}j\right) \right),
 \end{aligned}$$

слагаемые $f^{(k)}(i, j)$, $k = 1, 2, 3$ изображены на рис. 5.

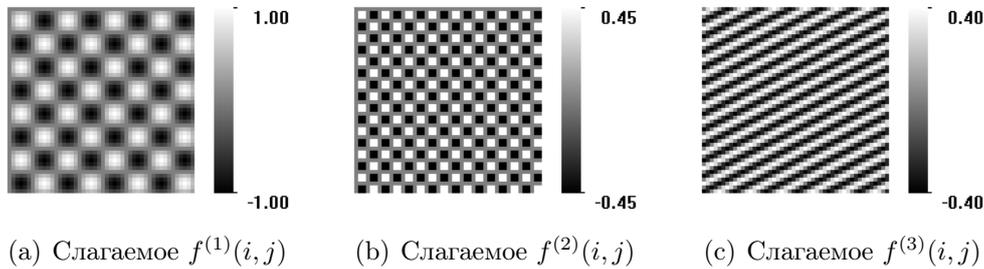


Рис. 5. Ex1: слагаемые поля (84)

Пользуясь предложением 12, можно вычислить ранг поля $f(i, j)$ и его слагаемых. Для $f(i, j)$ он равен 10, для полей $f^{(1)}(i, j)$ и $f^{(2)}(i, j)$ — 4, а для поля $f^{(3)}(i, j)$ ранг равен 2.

Как видно, ранг поля $f(i, j)$ равен сумме рангов своих слагаемых, что является необходимым условием (приближенной) разделимости (см. раздел 3.4. о разделимости), т.е. того, что полям $f^{(k)}(i, j)$, $k = 1, 2, 3$, в разложении поля $f(i, j)$ будут соответствовать различные наборы собственных троек.

Выбор размеров окна. Отметим, что слагаемые $f^{(1)}(i, j)$ и $f^{(2)}(i, j)$ являются произведениями одномерных рядов (см. раздел 3.5.3.), ранг которых равен 2. Поэтому стоит выбирать размеры окна (L_x, L_y) большие или равные двум, для корректного разложения на слагаемые вида (75). Также на размеры окна есть естественное ограничение $L_x L_y \geq 10$.

Теперь рассмотрим проблему выбора размеров окна с точки зрения разделимости слагаемых. Поле $f^{(3)}(i, j)$ не только является линейным преобразованием ряда (см. раздел 2.4.4.), но и представимо в виде суммы произведений одномерных тригонометрических рядов, как и слагаемые $f^{(1)}(i, j)$ и $f^{(2)}(i, j)$.

Для одномерных рядов рекомендуется [7] для лучшей приближенной разделимости гармоник выбирать длину окна, кратную их периодам. Можно считать, что для приближенной разделимости полей верны утверждения, аналогичные доказанным в разделе 3.4.2., т.е. для полей $p^{(1)}(i) \cdot q^{(1)}(j)$ и $p^{(2)}(i) \cdot q^{(2)}(j)$, приближенная разделимость одной из пар одномерных рядов, например $p^{(1)}(i)$ и $p^{(2)}(i)$, влечет приближенную разделимость полей. Поэтому, в данном примере стоит выбирать L_x кратное 12 или L_y , кратное 24.

Действительно, при разложении с размерами окна (10, 10), по матрице модулей взвешенных корреляций (см. раздел 3.4.1.) можно увидеть, что компоненты перемешиваются. Вид матрицы приведен на рис. 6 (на всех аналогичных рисунках ниже изображены модули, номера компонент идут сверху вниз и слева направо и, в отличие от остальных изображений матриц, белый цвет здесь соответствует близким к нулю значениям, а черный — близким к единице).

Однако, при разложении окном (12, 12) матрица w-корреляций имеет уже другой вид (см. рис. 7).



Рис. 6. Ex1: w-корреляции компонент при разложении окном (10, 10)



Рис. 7. Ex1: w-корреляции компонент при разложении окном (12, 12)

Идентификация компонент. Рассмотрим более подробно случай с размерами окна (12, 12). Видно, что компоненты разделяются на три группы: 1–4, 5–6 и 7–10. На графике собственных чисел (см. рис. 8, по оси абсцисс отложен номер собственного числа) также можно увидеть эти группы: 4+2+4.

Заметим также, что группы собственных чисел 1–4 и 7–10 имеют вид, похожий на вид собственных чисел для произведения синусов, описанный в разделе 3.5.3.. Это наблюдение дает дополнительные основания предполагать, что группы 1–4 и 7–10 соответствуют слагаемым $f^{(1)}(i, j)$ и $f^{(2)}(i, j)$. Для того чтобы еще больше в этом убедиться, посмотрим на собственные поля разложения.

Известно [7], что для рядов из синусов собственные вектора являются гармониками с такими же периодами. По (76) собственные поля для слагаемых $f^{(1)}(i, j)$ и $f^{(2)}(i, j)$ будут суммами произведений гармоник с соответствующими периодами (естественно, если поля делимы разложением). На рис. 9 видно, что группа 1–4 соответствует слагаемому $f^{(1)}(i, j)$, а группа 7–10 — $f^{(2)}(i, j)$. Заметим также, что собственные поля группы 5–6 похожи на поля вида $p(ai + bj)$, каким и является поле $f^{(3)}(i, j)$.



Рис. 8. Ex1: собственные числа при разложении окном (12,12)

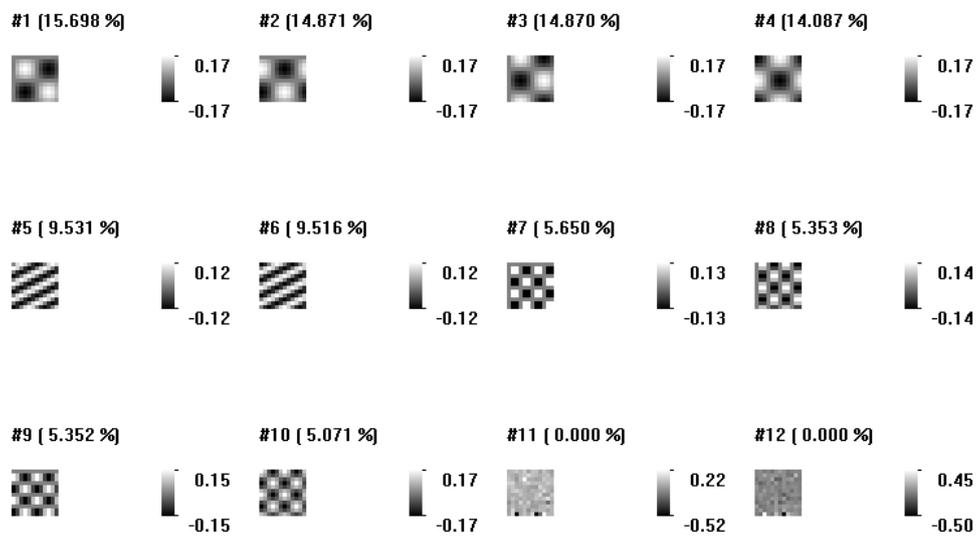


Рис. 9. Ex1: собственные поля 1–12

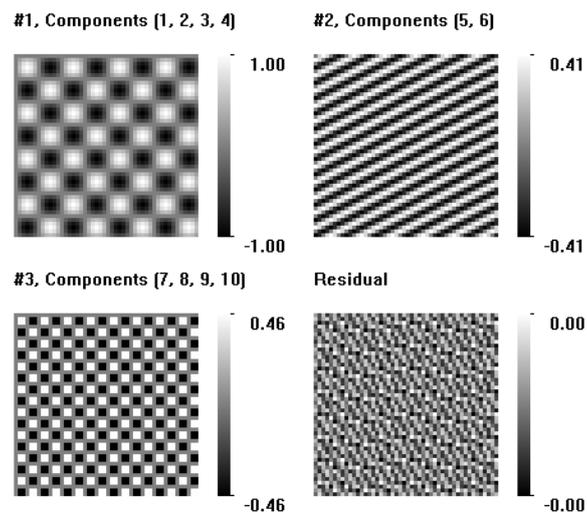


Рис. 10. Ex1: восстановленные поля

Восстановление по группам 1–4, 5–6 и 7–10 подтверждает наши предпо-

ложения (см. рис. 10).

5.2. Модельный пример с шумом

Рассмотрим поле (84) с добавленным к нему гауссовским шумом ($\sigma = 1.1$). Зажумленное поле изображено на рис. 11.

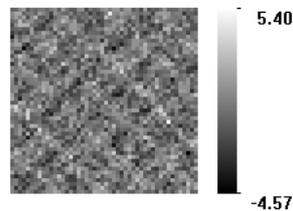


Рис. 11. Ex2: модельный пример (84) с шумом

В соответствии с результатами из раздела 4., поле (84) отделяется от шума и сигнал должен находиться в первых 10 компонентах. Если взять размеры окна (12, 12), то сигнал заметно перемешивается с шумом (см. рис. 12). К тому же, нарушается разделимость слагаемых $f^{(2)}(i, j)$ и $f^{(3)}(i, j)$.

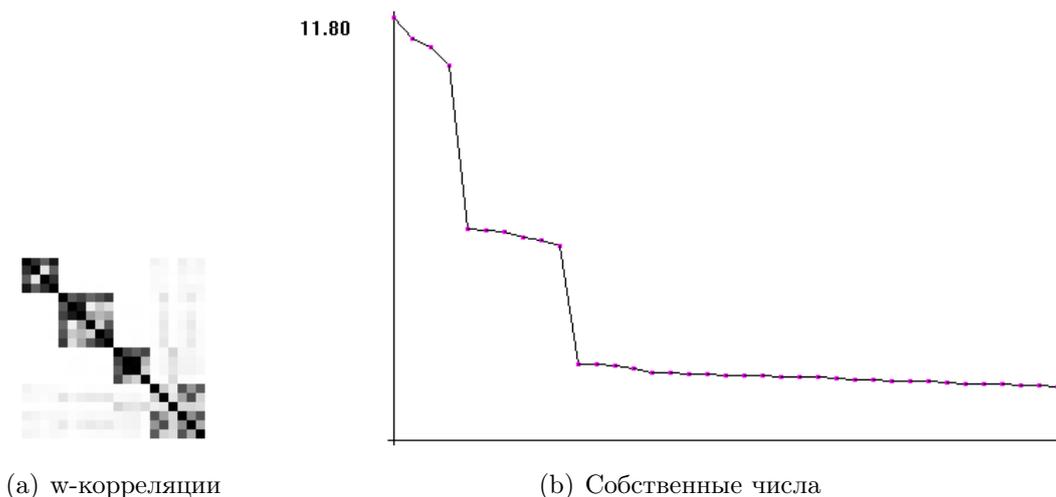


Рис. 12. Ex2: разложение с размерами окна (12, 12)

Тогда возьмем размеры окна (24, 24) (см. рис. 13). По матрице взвешенных корреляций уже не видно заметного перемешивания ни поля (84) с шумом, ни слагаемых между собой.

Слагаемые восстанавливаются достаточно хорошо (см. рис. 14).

На рис. 15 приведены модули коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье (DFT) [1] для восстановленного по компонентам 1–10 поля и остатка.

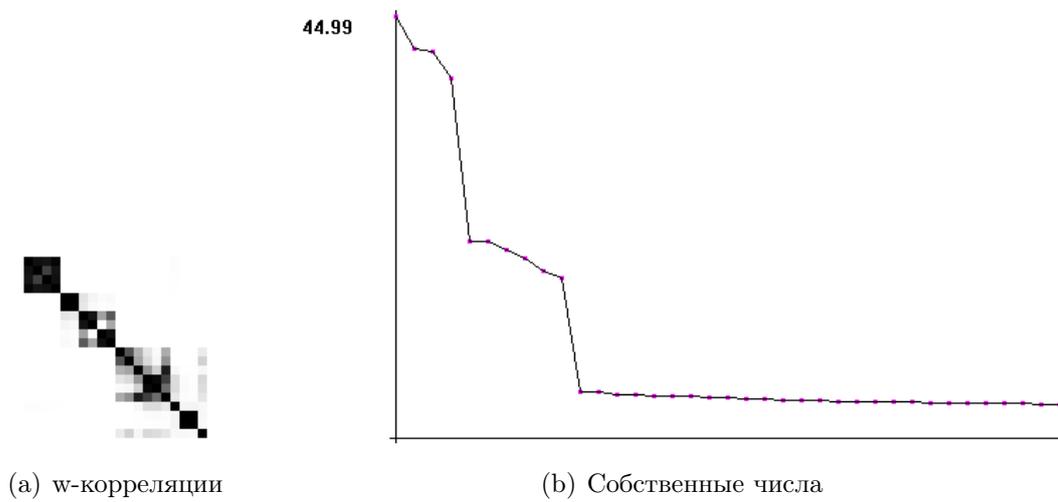


Рис. 13. Ех2: разложение с размерами окна (24, 24)

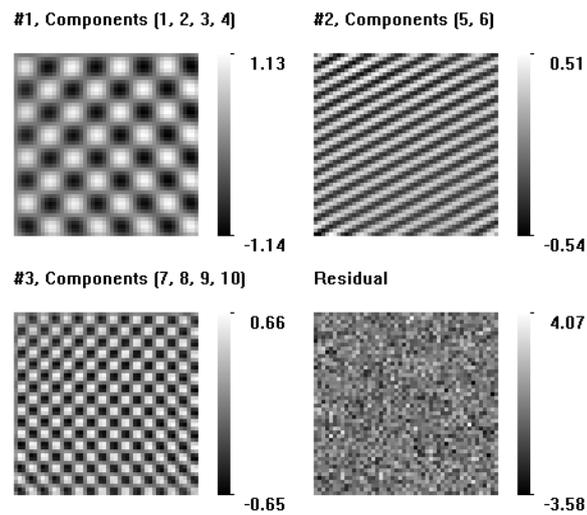


Рис. 14. Ех2: восстановленные поля

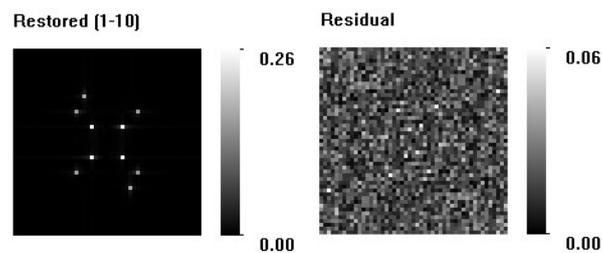


Рис. 15. Ех2: DFT для восстановленного поля и остатка

5.3. Удаление текстурного шума

Рассмотрим фотографию кота 252×252 в качестве примера применения 2D-SSA для удаления шума с произвольных изображений. Изображение приведено на рис. 16, оно монохромное, в шкале $[0, 255]$. На изображении хорошо виден текстурный шум.

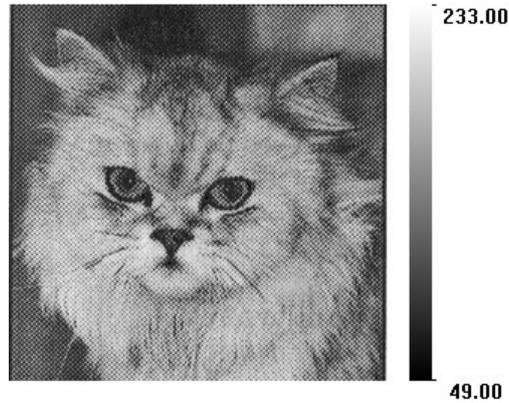


Рис. 16. Cat: исходное изображение

Сначала для выделения «тренда» к изображению был применен 2D-SSA с размерами окна $(6, 6)$. Размеры окна были выбраны такими, для того чтобы «тренд» меньше перемешивался с другими компонентами. Первое собственное число в разложении существенно больше всех остальных, и по первой собственной тройке был выделен «тренд». На рис. 17 видно, что весь текстурный шум попал в остаток.

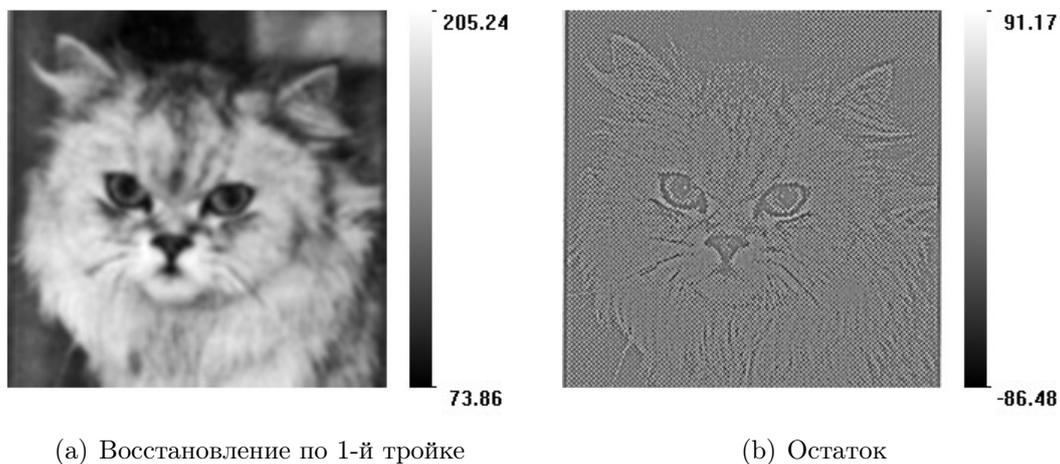


Рис. 17. Cat: первый этап, выделение «тренда» окном $(6, 6)$

Далее остаток раскладывался окном $(32, 32)$, так как шум на изображении визуально имеет такие периоды. По матрице w -корреляций (128×128) (см. рис. 18) видно, что примерно 60 первых компонент довольно хорошо отделяются от остальных.

Это можно определить и по виду собственных и факторных полей. Более того, оказалось, что указанная группа первых компонент относится к текстурному шуму. Это наблюдение является довольно интересным, так как в случае

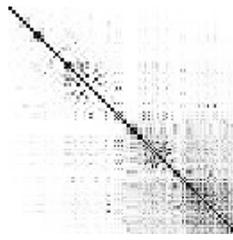
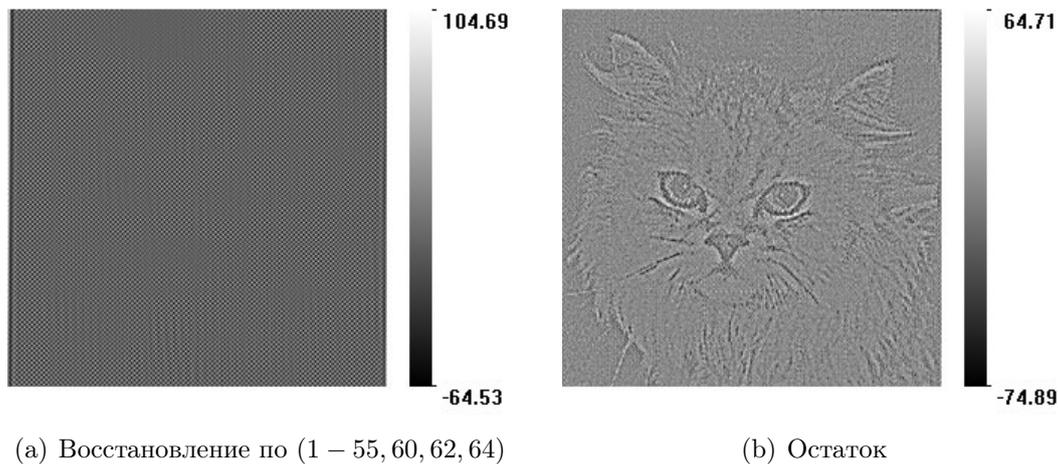


Рис. 18. Cat: матрица w-корреляций остатка

применения методов SSA для решения задачи отделения от шума (например, отделения поля конечного ранга от шума), как правило, первые компоненты относятся к сигналу, а все остальные к шуму. То есть можно считать, что в данном случае текстурный шум является сигналом, а остальные компоненты — шумом.

Для восстановления была выбрана группа (1–55, 60, 62, 64). По восстановленным полям на рис. 19 видно, что текстурный шум отделился достаточно хорошо.



(a) Восстановление по (1 – 55, 60, 62, 64)

(b) Остаток

Рис. 19. Cat: второй этап, разложение окном (32, 32)

В итоге, суммированием остатка из второго разложения и «тренда» было получено очищенное изображение (см. рис. 20).

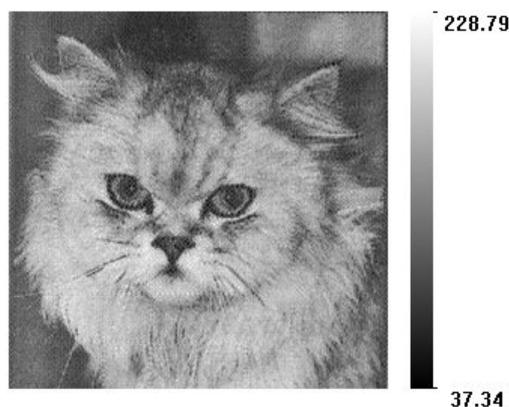


Рис. 20. Cat: очищенное от шума изображение

5.4. Удаление синусоидального шума

В качестве тестового примера было взято изображение Марса 275×278 , полученное с помощью веб-камеры (См. рис. 21).

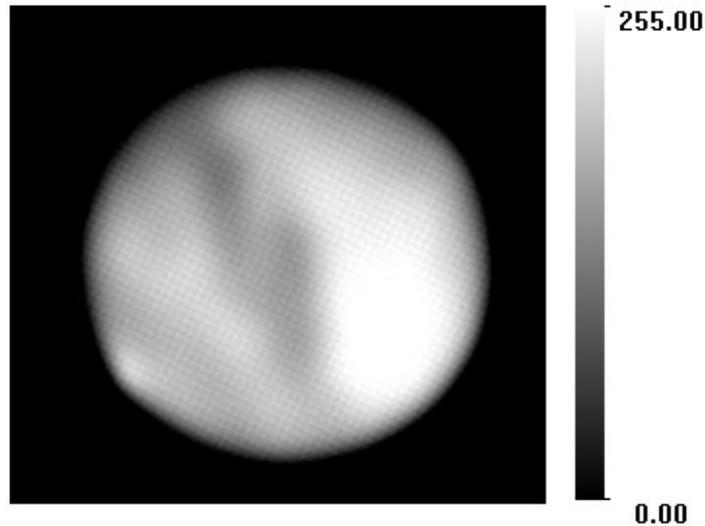


Рис. 21. Mars: изображение Марса

На изображении присутствует паразитный электромагнитный шум, который, в силу своей физической природы, является синусоидальным. Поэтому он достаточно хорошо выделяется разложением с окном $(30, 30)$ и восстановлением по компонентам $(15, 16, 19, 20)$ (см. рис. 22).

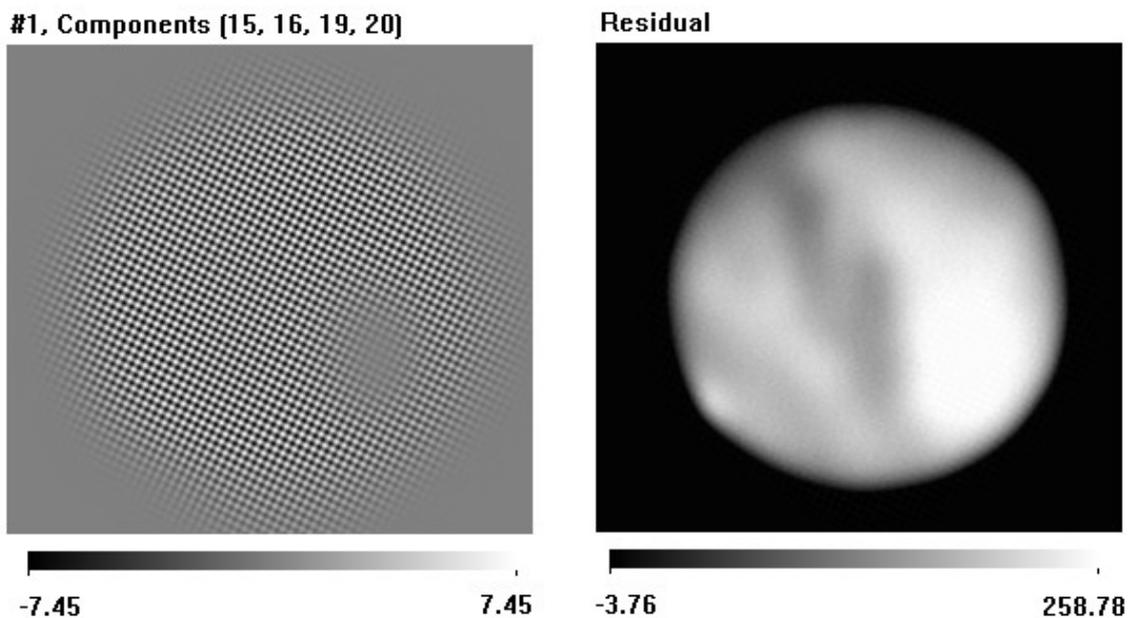


Рис. 22. Mars: восстановленные изображения

6. Приложение. Метод «Гусеница»-SSA для анализа временных рядов

В этом разделе мы приведем краткие сведения о методе «Гусеница»-SSA, следуя, главным образом, [7]. Эти сведения дополнены доказанным в подразделе 6.3. утверждением об эквивалентности понятий рядов конечного и неполного ранга.

6.1. Базовый алгоритм

Рассмотрим вещественнозначный временной ряд $F = F_N = (f_0, \dots, f_{N-1})^T$ длины $N > 2$. В этой работе, в отличие от [7], удобнее рассматривать временной ряд как вектор из \mathbb{R}^N .

Будем предполагать, что ряд F — ненулевой, т. е. существует по крайней мере одно i , такое что $f_i \neq 0$.

6.1.1. Этап разложения.

Вложение. Пусть L — некоторое целое число (длина окна), $1 < L < N$. Процедура вложения образует $K = N - L + 1$ векторов вложения

$$(85) \quad X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+L-2})^T \in \mathbb{R}^L, \quad 1 \leq i \leq K.$$

L -Траекторная матрица (или просто траекторная матрица) ряда F

$$(86) \quad \mathbf{X} = [X_1 : \dots : X_K]$$

состоит из векторов вложения как столбцов. Другими словами, траекторная матрица имеет вид

$$(87) \quad \mathbf{X} = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix},$$

где $x_{ij} = f_{i+j-2}$, т.е. матрица \mathbf{X} имеет одинаковые элементы на «диагоналях» $i+j = \text{const}$. Матрицы такой структуры называются *ганкелевыми*. Существует очевидное взаимно-однозначное соответствие между ганкелевыми матрицами размерности $L \times K$ и рядами длины $N = L + K - 1$.

Сингулярное разложение. Пусть $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Обозначим $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ все ненулевые *собственные числа* матрицы \mathbf{S} , взятые в неубывающем порядке ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d > 0$) и U_1, \dots, U_d — ортонормированную систему *собственных векторов* матрицы \mathbf{S} , соответствующих собственным числам.

Если обозначить $V_i = \mathbf{X}^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, d$, то *сингулярное разложение* матрицы \mathbf{X} может быть записано как

$$(88) \quad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

Набор $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ мы будем называть *i -й собственной тройкой* сингулярного разложения (88).

6.1.2. Восстановление.

Группировка. На основе разложения (88) процедура группировки делит все множество индексов $\{1, \dots, d\}$ на m непересекающихся подмножеств I_1, \dots, I_m . Тогда разложение (88) может быть записано в сгруппированном виде

$$(89) \quad \mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{I_k},$$

где \mathbf{X}_I — сгруппированная по множеству индексов $I \subseteq \{1, \dots, d\}$ компонента:

$$\mathbf{X}_I = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

Процедура выбора множеств I_1, \dots, I_m и называется *группировкой собственных троек*.

Диагональное усреднение (ганкелизация). На последнем шаге базового алгоритма каждая матрица сгруппированного разложения (89) переводится в новый ряд длины N . Сначала матрицам \mathbf{X}_{I_k} сопоставляются ганкелевы матрицы вида (87) с помощью линейного оператора ганкелизации.

Оператор ганкелизации $\mathcal{H} : \mathcal{M}_{K,L} \mapsto \mathcal{M}_{K,L}$ сопоставляет произвольной матрице $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{L,K}$ ганкелеву матрицу $\mathcal{H}\mathbf{A}$:

$$\mathcal{H}\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \dots & \tilde{a}_K \\ \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & \dots & \tilde{a}_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_L & \tilde{a}_{L+1} & \dots & \tilde{a}_N \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\tilde{a}_k = \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{D}_k} a_{ij} \right) / |\mathcal{D}_k|,$$

где $\mathcal{D}_k = \{(i, j) : 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq K, i+j = k+1\}$. Иными словами, оператор ганкелизации усредняет элементы, стоящие на «диагоналях» $i+j = \text{const}$.

Тогда, если обозначить $\tilde{\mathbf{X}}_{I_k} = \mathcal{H}\mathbf{X}_{I_k}$, разложение (89) превращается в

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \tilde{\mathbf{X}}_{I_k}.$$

Затем каждой ганкелевой матрице $\tilde{\mathbf{X}}_{I_k}$ однозначно ставится в соответствие ряд F_{I_k} длины N , который называется *восстановленным по набору индексов I_k рядом*. Таким образом мы получаем разложение ряда в сумму восстановленных рядов

$$(90) \quad F = \sum_{k=1}^m F_{I_k}.$$

6.2. Разделимость

Рассмотрим временной ряд $F_N = (f_0, \dots, f_{N-1})$ с $N \geq 3$ и зафиксируем длину окна L , $1 < L < N$. В результате процедуры вложения мы получаем последовательность векторов вложения (85).

Определение 19. $\mathcal{L}^{(L)} = \mathcal{L}^{(L)}(F_N) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(X_1, \dots, X_K)$ — траекторное пространство ряда F_N .

Пусть теперь $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ — ряды длины N и $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$. При выборе длины окна, равной L , каждый из рядов $F_N^{(1)}$, $F_N^{(2)}$ и F_N порождает L -траекторную матрицу: $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$ и \mathbf{X} .

Обозначим $\mathcal{L}^{(L,1)}$ и $\mathcal{L}^{(L,2)}$ траекторные пространства рядов, т.е. линейные пространства, порожденные столбцами траекторных матриц $\mathbf{X}^{(1)}$ и $\mathbf{X}^{(2)}$ соответственно. Аналогичные обозначения $\mathcal{L}^{(K,1)}$ и $\mathcal{L}^{(K,2)}$ будем использовать для пространств, порожденных столбцами транспонированных матриц $(\mathbf{X}^{(1)})^T$ и $(\mathbf{X}^{(2)})^T$, $K = N - L + 1$ (можно сказать, что они порождены строками траекторных матриц).

Определение 20. Будем говорить, что ряды $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ слабо L -разделимы (или, для краткости, просто слабо разделимы), если $\mathcal{L}^{(L,1)} \perp \mathcal{L}^{(L,2)}$ и $\mathcal{L}^{(K,1)} \perp \mathcal{L}^{(K,2)}$.

Разделимость (точная и приближенная) является ключевым понятием метода SSA, так как дает возможность по наблюдаемой сумме рядов найти составляющие эту сумму разделимые слагаемые.

6.3. Ряды конечного и неполного ранга

Важным классом рядов в методе SSA являются ряды конечного ранга [7].

Определение 21. Пусть $0 \leq d \leq L$. Если $\dim \mathcal{L}^{(L)} = d$, то мы будем говорить, что ряд F_N имеет L -ранг d , и записывать это как $\text{rank}_L(F_N) = d$. Для нулевого ряда положим $\dim \mathcal{L}^{(L)} = 0$.

Выполняются следующие свойства:

1. $\text{rank}_L(F_N) = \text{rank } \mathbf{X} = \text{rank } \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \text{rank } \mathbf{X}^T\mathbf{X}$.
2. Ортонормированная система собственных векторов $\{U_i\}_{i=1}^d$, соответствующих положительным собственным числам $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$ матрицы $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$, составляет ортонормированный базис пространства $\mathcal{L}^{(L)}$.
3. Число $\text{rank}_L(F_N)$ равняется порядку сингулярного разложения траекторной матрицы \mathbf{X} .

Естественно ввести такое определение.

Определение 22. Ряд F_N — неполного L -ранга, если $\text{rank}_L(F_N) < L$.

Ряды неполного ранга играют важную роль в SSA, так как для того чтобы ряд был отделен от другого окном L , необходимо, чтобы он был неполного L -ранга. Также это необходимо для L -продолжимости ряда (понятие L -продолжимости сформулировано в [7]).

Чтобы убрать зависимость понятий конечного/неполного L -ранга от L , определим понятие ряда конечного/неполного ранга, как ряда конечного/неполного L -ранга в некоторой области значений параметра L . Далее будет доказано, что класс рядов неполного ранга совпадает с классом рядов конечного ранга.

Определение 23. Если равенство $\text{rank}_L(F_N) = d < N/2$ имеет место для любого L , такого что $d \leq L \leq N/2$, то будем говорить, что ряд F_N имеет ранг d ($\text{rank}(F_N) = d$). Если такое d существует, то ряд F_N будем называть *рядом конечного ранга*.

Определение 24. Если существует L_0 , такое что $0 < L_0 < N/2$ и $\text{rank}_L(F_N) < L$ для любого L , $L_0 < L \leq N/2$, то ряд F_N будем называть *рядом неполного ранга*.

Пусть $\mathbf{X} = [X_1 : \dots : X_K]$ — траекторная матрица ряда F_N для длины окна L , $\mathbf{X}^{(1)} = [X_1^{(1)} : \dots : X_{K-1}^{(1)}]$ — для длины окна $L + 1$.

Для вектора $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ введем обозначения X_Δ и X^∇ , где $X_\Delta = (x_2, \dots, x_n)^T$ и $X^\nabla = (x_1, \dots, x_{n-1})^T$. Тогда выполняются равенства $(X_i^{(1)})^\nabla = X_i$ и $(X_i^{(1)})_\Delta = X_{i+1}$.

Обозначим пространства:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_L &= \mathcal{L}^{(L)}(F_N) = \text{span}(X_1, \dots, X_K), \\ \mathcal{L}_{L+1} &= \mathcal{L}^{(L+1)}(F_N) = \text{span}(X_1^{(1)}, \dots, X_{K-1}^{(1)}), \\ \mathcal{L}_{L+1}^\nabla &= \text{span}(X_1, \dots, X_{K-1}) = \text{span}(X_1^{(1)\nabla}, \dots, X_{K-1}^{(1)\nabla}), \\ (\mathcal{L}_{L+1})_\Delta &= \text{span}(X_2, \dots, X_K) = \text{span}((X_1^{(1)})_\Delta, \dots, (X_{K-1}^{(1)})_\Delta).\end{aligned}$$

Лемма 11. Пусть $X_K, e_L \in \text{span}(X_1, \dots, X_{K-1})$. Тогда $\text{rank}_L(F_N) = L$.

Доказательство леммы 11. Докажем по индукции.

1. Для $L = 1$ очевидно.
2. Пусть доказано для $L < \lfloor N/2 \rfloor$. Докажем для $L + 1$.

Итак, пусть $X_{K-1}^{(1)}, e_{L+1} \in \text{span}(X_1^{(1)}, \dots, X_{K-2}^{(1)})$. Заметим, что $X_K = (X_{K-1}^{(1)})_\Delta$. Тогда

$$\begin{aligned}X_K, e_L &\in \text{span}((X_1^{(1)})_\Delta, \dots, (X_{K-2}^{(1)})_\Delta) = \\ &= \text{span}(X_2, \dots, X_{K-1}) \subseteq \\ &\subseteq \text{span}(X_1, \dots, X_{K-1}).\end{aligned}$$

По индукционному предположению, $\text{rank}_L(F_N) = L$, а значит, $\dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla = L$, к тому же, $e_{L+1} \in \mathcal{L}_{L+1}$. Таким образом, $\text{rank}_{L+1}(F_N) = \dim \mathcal{L}_{L+1} = L + 1$.

Другими словами лемму 11 можно переформулировать так: если продолжение в L -траекторном пространстве существует и неединственно, то траекторное пространство совпадает с \mathbb{R}^L .

Предложение 13. Если для какого-то L , $0 < L < N/2$, выполняется неравенство $\text{rank}_L(F_N) = d < L$, то $\text{rank}_{L+1}(F_N) = d$.

Доказательство предложения 13. Во введенных обозначениях, нужно доказать, что $\dim \mathcal{L}_L = \dim \mathcal{L}_{L+1}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla &\leq \dim \mathcal{L}_L \leq \dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla + 1, \\ \dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla &\leq \dim \mathcal{L}_{L+1} \leq \dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla + 1. \end{aligned}$$

Пусть $\dim \mathcal{L}_L = d$. Предположим, что $\dim \mathcal{L}_{L+1} \neq \dim \mathcal{L}_L$, т.е. $\dim \mathcal{L}_{L+1}$ равно либо $d + 1$, либо $d - 1$.

Рассмотрим два возможных случая для размерности $\dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla$.

1. Пусть $\dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla = d$. Тогда по предположению $\dim \mathcal{L}_{L+1} = d + 1 > \dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla$, а значит $e_{L+1} \in \mathcal{L}_{L+1}$. Отсюда следует, что $e_L \in (\mathcal{L}_{L+1})_\Delta \subseteq \mathcal{L}_L$. Из $\dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla = \dim \mathcal{L}_L = d$ следует $X_K \in \mathcal{L}_{L+1}^\nabla$. Таким образом, выполняется $X_K, e_L \in \text{span}(X_1, \dots, X_{K-1})$. По лемме 11 $\text{rank}_L(F_N) = L - 1$ — получаем противоречие.
2. Пусть $\dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla = d - 1$. Следовательно, вектор X_K независим от векторов X_1, \dots, X_{K-1} . С другой стороны, по предположению, $\dim \mathcal{L}_{L+1} = d - 1 = \dim \mathcal{L}_{L+1}^\nabla$, а значит $e_{L+1} \notin \mathcal{L}_{L+1}$. Поэтому существуют $a_1, \dots, a_L \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, такие что $f_{N-K+i+1} = (a_1, \dots, a_L)X_i$, где $i \in \{1, \dots, K - 1\}$. Так как матрица \mathbf{X} — ганкелева, то выполняется $X_K = \sum_{j=1}^L a_j X_{K-L-1+j}$. Получаем противоречие.

Таким образом, предположение $\dim \mathcal{L}_L \neq \dim \mathcal{L}_{L+1}$ неверно. Что и требовалось доказать.

Следствие 4. Ряд неполного ранга является рядом конечного ранга, и наоборот.

Заметим, что класс бесконечных рядов конечного ранга совпадает с классом рядов, управляемых линейными рекуррентными формулами, и состоит из сумм произведений полиномов, гармоник и экспонент. В частности, ранг синуса/косинуса с периодом больше двух равен 2, ранг полинома на единицу больше его степени, а ранг экспоненты равен 1.

Список литературы

1. Прэйтт У. Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. Кн. 1. 312 с.
2. Van Loan C.F., Pitsianis N.P. Approximation with Kronecker products // Linear Algebra for Large Scale and Real Time Applications / Ed. by M.S.Mooney and G. H. Golub, Kluwer Publications, 1993. P. 293–314. <http://citeseer.ist.psu.edu/vanloan93approximation.html>

3. Hua Yang H., Hua Y. On Rank of Block Hankel Matrix for 2-D Frequency Detection and Estimation // IEEE Transactions on Signal Processing. Vol. 44, Issue 4. 1996. P. 1046–1048.
4. Данилов Д.Л. Метод главных компонент для обработки многомерных полей // Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница» / Под ред. Д.Л. Данилова, А.А. Жиглявского. СПб: Пресском, 1997. С. 132–148.
5. Некруткин В.В. Разложения временных рядов // Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница» / Под ред. Д.Л. Данилова, А.А. Жиглявского. СПб: Пресском, 1997. С. 194–227.
6. Rouquette S. and Najim M. Estimation of frequencies and damping factors by two-dimensional ESPRIT type methods // IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 49, No. 1. 2001. P. 237–245.
7. Golyandina, N., Nekrutkin, V., and Zhigljavsky, A. Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques / Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. 305 p.
8. Магнус Я.Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике: Пер. с англ. / Под ред. С.А. Айвазяна – М.: Физматлит, 2002. – 469 с.
9. Голяндина Н.Э., Некруткин В.В., Степанов Д.В. Варианты метода «Гусеница»-SSA для анализа многомерных временных рядов // Труды II Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'03, Москва, 29-31 января 2003. М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, 2003. С. 2139–2168.
10. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. / СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. 76 с.
11. Laub, A. J. Matrix Analysis for Scientists and Engineers / SIAM, 2004. 157 p.
12. Golyandina, N.E., Usevich, K.D., and Florinsky, I.V. Filtering of Digital Terrain Models by Two Dimensional Singular Spectrum Analysis // International Journal of Ecology & Development / Vol. 8, No. F07, 2007. P. 81-94.
13. «Гусеница»: анализ и прогноз временных рядов. <http://www.gistatgroup.com/gus/>